ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ЖУРНАЛ ПРАКТИКИ

Студентки 4 курса Мамчур Александры Вячеславовны
(Фамилия, имя. отчество)

Факультет №8 «Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»

Учебная группа М8О-04Б-16

Направление 01.03.04. Прикладная математика
(шифр) *(название направления)*

Вид практики преддипломная
(учебная, производственная (вычислительная, исследовательская), преддипломная)

в Московском авиационном институте (НИУ)
(наименование предприятия, учреждения, организации)

Руководитель практики от МАИ Иванов С.В. ______________
(ФИО) (Подпись)

Мамчур А.В. / ____________________ / “10” мая 2020 г.
(ФИО) (подпись студента) (дата)

Москва 2020

1. Место и сроки проведения практики

Дата начала практики *“09” февраля 2020 г.*

Дата окончания практики *“10” мая 2020 г.*

Наименование предприятия МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Название структурного подразделения кафедра 804

План-график

1. *Вводная лекция –* “09” февраля 2020 г.

(дата проведения)

2. *Инструктаж по технике безопасности*

00000000000000 /_______________/ “09” февраля 2020 г.

(подпись проводившего) *(дата проведения)*

3. *Предварительное определение темы и объема работ*

Предварительно было решено делать работу сразу по теме «многоэтапная задача управления запасами». Для начала необходимо было рассмотреть постановки одноэтапных задач и запрограммировать их. Затем перейти к постановке многоэтапной, обосновать линеаризацию и решить практический пример с использованием квантильного и вероятностных критериев для многоэтапной задачи.

“__” февраля 2020 г.

(дата проведения)

4. *План работ*

1. Определение темы диплома
2. Изучение необходимой литературы
3. Запись постановок одноэтапных задачи линейного стохастического программирования для критерия в форме математического ожидания, вероятности и квантили.
4. Решение полученных задач в среде MATLAB.
5. Постановка многоэтапной задачи.
6. Доказательство перехода к эквивалентной задаче с линеаризованными переменными.
7. Решение практического пример задачи управления запасами с использованием

квантильного и вероятностных критериев в среде MATLAB.

___00000000000000_____ /________________/ “____” февраля 2020 г.

(подпись руководителя) *(дата проведения)*

5. *Отчет о практике*

1. Постановка задачи

Предположим, что компания должна принять решение о закупке некоторого количества определенного продукта u, чтобы удовлетворить спрос x.

c- цена заказа.

x - реализация случайной величины спроса X.

b – потери от дефицита товара. ($x > u$)

h – траты за хранение излишней продукции на складе. (u $> x$)

Таким образом, задача заключается в минимизации целевой функции:

$$\Phi(u, x) = cu + b[x - u]_+ + h[u - x]_+,$$

где для $a \in R$, $[a]_+$ означает максимум $\max\{a, 0\}$.

Также мы предполагаем, что b > c.

Поскольку в момент планирования спрос случаен, потери $\Phi(u, X)$ является случайной величиной, поэтому при принятии решения следует выбрать стратегию u, оптимизирующую некоторый вероятностный функционал $J[\Phi(u, X)]$, где $J: L_0 \to R$, L_0 – пространство всех случайных величин. Можно рассмотреть различные виды вероятностных функционалов.

- Критерий с использованием математического ожидания:

$$f(u) = \mathrm{M}[\Phi(u, X)] \to \min_{u \in U}$$

- Скорректируем выбранную стратегию:

$$cu + \mathrm{M}[\Phi(u, X)] \to \min_{u \in U}$$

- Вероятностный критерий:

$$\mathrm{P}_{\varphi}(u) \triangleq \mathrm{P}\{\Phi(u, X) \leq \varphi\} \to \max$$

- подход, использующий функцию квантили:

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi | P_\varphi(u) \geq \alpha\} \to \min_{u \in U}$$

2. Сведение задач к смешанным целочисленным задачам оптимизации.

Заметим, что с введением новым переменных функцию потерь можно записать в виде задачи линейного программирования, то есть целевая функция может быть записана в следующем виде:

$$\Phi(u, x) = \min_{y_1 y_2}\{cu + by_1 + hy_2\} \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$x - u \leq y_1,$$

$$u - x \le y_2,$$

$$y_i \ge 0.$$

X - дискретная случайная величина, тогда $x_k \to y_1^{(k)},\ y_2^{(k)}$ и :

$$\Phi(u, x_k) = \min_{y_1^k y_2^k}\left\{cu + b\, y_1^{(k)} + h\, y_2^{(k)} \middle| y^{(k)} \ge 0,\ x_k - u \le\ y_1^{(k)},\ u - x_k \le\ y_1^{(k)}\right\}.$$

Получим задачу линейного программирования для критерия математического ожидания:

$$\Phi(u, x_k) = \min_{y_1^k y_2^k}\left\{cu + \sum_{k=1}^{K} p_k\left(by_1^{(k)} + hy_2^{(k)}\right) \middle| y^{(k)} \ge 0,\ x_k - u \le\ y_1^{(k)},\ u - x_k \le\ y_1^{(k)}\right\}.$$

Теперь рассмотрим задачи максимизации вероятности (2) и минимизации функции квантили (3) в случае дискретного распределения:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} p_k \delta_k \to \max\limits_{u,\delta,y^1,\dots,y^k} \\ cu + by_1^{(k)} + hy_2^{(k)} \le \varphi + L(1 - \delta_k) \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} cu + by_1^{(k)} + hy_2^{(k)} \le \varphi + L(1 - \delta_k) \\ \sum_{k=1}^{K} p_k \delta_k \ge \alpha \end{cases} \quad (3)$$

$$x_k - u \le y_1^{(k)}, \qquad x_k - u \le y_1^{(k)},$$

$$u - x_k \le y_2^{(k)}, \qquad u - x_k \le y_2^{(k)},$$

$$y_{1,2}^{(k)} \ge 0. \qquad y_{1,2}^{(k)} \ge 0.$$

где L- достаточно большая константа, $\delta_k \in \{0,\ 1\}$.

3. Постановка многоэтапной задачи

Рассмотрим предприятие, выпускающее партиями 2 вида стульев и имеющее склад для хранения товара. Оно получило заказ на продукцию на 2 месяца (этапа) вперед. На каждом этапе спрос различен и является случайной величиной.

Рассмотрим общий случай для t=1,…,T этапов. В каждый момент времени компания отслеживает уровень запасов $z(t)$:

$$z_i(t) = [u_i(t) - x_i(t) + z_i(t-1)]_+$$

при $z(0) = z_0 \in R_+^n$, где i=$\overline{1,n}$ – количество видов продукции.

После сбыта некоторого количества товара компания делает заказ, равный объему закупки $u(t)$.

Тогда функция потерь многоэтапной стохастической задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\Phi(u, x) = \min_u \sum_{t=1}^{T}\left(c^T u(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i[x_i(t) - u_i(t) - z_i(t-1)]_+ + \sum_{i=1}^{n} h_i[u_i(t) - x_i(t) + z_i(t-1)]_+\right)$$

Также будем учитывать ограничение на объем склада

$$\sum_{i=1}^{n}(u(t)+z(t-1))_i v_i \le V,$$

где V – объем склада, v_i – объем места, занимаемый i-й продукцией.

$u \in U$- множество функций u, таких что:

$$U=\left\{(u(1),\ u(2),\dots,u(T))\left|\begin{array}{c}u(1)\colon X(1)\to R^n,\\ u(2)\colon X(1)\times X(2)\to R^n,\dots,\\ u(T)\colon X(1)\times X(2)\times\dots\times X(T)\to R^n\end{array}\right.\right\}$$

Линеаризуем данную модель путем введения новых переменных

$$y_{i-}(x_{[t]})=\left[x_i(t)-u_i(x_{i[t-1]})-z_i(t-1)\right]_+,\ y_{i+}(x_{[t]})=\left[u_i(x_{i[t-1]})-x_i(t)+z_i(t-1)\right]_+.$$

Получим задачу с линеаризованными переменными:

$$\Psi(u,x)=\min_{y_{i-}(x_{[t]}),\,y_{i+}(x_{[t]})}\sum_{t=1}^{T}\left(c^T u(x_{[t-1]})+\sum_{i=1}^{n}b_i y_{i-}(x_{[t]})+h_i y_{i+}(x_{[t]})\right)$$

$$x_i(t)-u_i(x_{i[t-1]})-z_i(t-1)\le y_{i-}(x_{[t]}),$$

$$u_i(x_{i[t-1]})-x_i(t)+z_i(t-1)\le y_{i+}(x_{[t]}),$$

$$\left(u(x_{[t-1]})+z(t-1)\right)^T v\le V$$

$$y_{i-}(x_{[t]}),y_{i+}(x_{[t]})\ge 0$$

Утверждение. Если $h_i\ge b_i$, то $\Phi(u,x)=\Psi(u,x)$.

Дана задача с критерием в форме математического ожидания

$$cu+\mathrm{M}[\Phi(u,X)]\to\min_u \qquad (1)$$

и эквивалентная ей, но линеаризованная с помощью новых переменных

$$cu+\sum_{k_1,k_2=1}^{N}p_{k_1,k_2}\left(c^T u+\sum_{i=1}^{n}b_i y_{i-}^{k_1}+h_i y_{i+}^{k_1}+c^T u^{k_1}+b_i y_{i-}^{k_1k_2}+h_i y_{i+}^{k_1k_2}\right)\to\min_{u,y}$$

$$x_i(1)-u_i-z_{i0}\le y_{i-}^{k_1},$$

$$u_i-x_i(1)+z_{i0}\le y_{i+}^{k_1},$$

$$x_i(2)-u_i^{k_1}-z_i(1)\le y_{i-}^{k_1k_2}, \qquad (2)$$

$$u_i^{k_1}-x_i(2)+z_i(1)\le y_{i+}^{k_1k_2},$$

$$(u+z_0)^T v\le V,$$

$$(u^{k_1}+z(1))^T v\le V,$$

$$y_{i-}^{k_1}, y_{i+}^{k_1}, y_{i-}^{k_1k_2}, y_{i+}^{k_1k_2} \geq 0, k_1, k_2 = \overline{1,N},\ i = \overline{1,n}$$

Утверждение 1. Если u – оптимальное решение (1), то существует набор переменных $y_{i-}^{k_1}, y_{i+}^{k_1}, y_{i-}^{k_1k_2}, y_{i+}^{k_1k_2}$ такой, что u, u^{k_1}, $y_{i-}^{k_1}, y_{i+}^{k_1}, y_{i-}^{k_1k_2}, y_{i+}^{k_1k_2}$ оптимален в (2).

Если существует набор значений u, u^{k_1}, $y_{i-}^{k_1}, y_{i+}^{k_1}, y_{i-}^{k_1k_2}, y_{i+}^{k_1k_2}$, который оптимален в (2), то u, u^{k_1} – оптимальное решение (1).

Аналогичные утверждения формулируются для вероятностного и квантильного критериев.

Утверждение 2. Для вероятностного получим:

$$\mathrm{P}_\varphi(u) \triangleq \mathrm{P}\{\Phi(u,X) \leq \varphi\} \to \max_u$$

и эквивалентную ей, но линеаризованную с помощью новых переменных

$$\begin{cases} \sum_{k_1,\,k_2=1}^{N} p_{k_1,\,k_2}\delta_{k_1,\,k_2} \to \max_{u,\delta,y_-,y_+,} \\ c^T u + \sum_{k_1,\,k_2=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} b_i y_{i-}^{k_1} + h_i y_{i+}^{k_1} + c^T u^{k_1} + b_i y_{i-}^{k_1k_2} + h_i y_{i+}^{k_1k_2} \leq \varphi + L\left(1 - \delta_{k_1,\,k_2}\right) \end{cases}$$

при ограничениях (2).

Утверждение 3. Для квантильного:

$$\varphi_\alpha(u) = \min\left\{\varphi \middle| P_\varphi(u) \geq \alpha\right\} \to \min_{u\in U}$$

и эквивалентную ей

$$\begin{cases} c^T u + \sum_{k_1,\,k_2=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} b_i y_{i-}^{k_1} + h_i y_{i+}^{k_1} + c^T u^{k_1} + b_i y_{i-}^{k_1k_2} + h_i y_{i+}^{k_1k_2} \leq \varphi + L\left(1 - \delta_{k_1,\,k_2}\right) \\ \sum_{k_1,\,k_2=1}^{n} p_{k_1,\,k_2}\delta_{k_1,\,k_2} \geq \alpha \end{cases}$$

при ограничениях (2).

4. Результаты программы:
1. Дано:

	c	h	b	v	z_0
1 товар	1	1.3	1.2	1	5
2 товар	1.5	1.8	1.7	3	7

φ	L
27	1000

В случае вероятностного критерия для двух реализаций:

f
0.75

u_1	u_2
9.6	1.61

$y_{1-}^1(1)$	$y_{2-}^1(1)$	$y_{1+}^1(1)$	$y_{2+}^1(1)$
0	0	3.96	0
$y_{1-}^2(1)$	$y_{1-}^2(1)$	$y_{1+}^2(1)$	$y_{1+}^2(1)$
0	6.96	2.41	0

$u_1^1(2)$	$u_2^1(2)$	$y_{1-}^{11}(2)$	$y_{2-}^{11}(2)$	$y_{1-}^{12}(2)$	$y_{2-}^{12}(2)$
0	0	8.19	0	1.56	4.68
$u_1^2(2)$	$u_2^2(2)$	$y_{1-}^{21}(2)$	$y_{1-}^{21}(2)$	$y_{1-}^{22}(2)$	$y_{2-}^{22}(2)$
0	0	0	0	1.56	4.68

$y_{1+}^{11}(2)$	$y_{2+}^{11}(2)$	$y_{1+}^{12}(2)$	$y_{2+}^{12}(2)$	$z_1^1(1)$	$z_2^1(1)$
0	0	0	0	10.65	8.61
$y_{1+}^{21}(2)$	$y_{1+}^{21}(2)$	$y_{1+}^{22}(2)$	$y_{2+}^{22}(2)$	$z_1^2(1)$	$z_2^2(1)$
0	0	0	0	10.65	8.61

δ_1^1	δ_2^1
1	1
δ_1^2	δ_2^2
1	0

2. Дано:

	c	h	b	v	z_0
1 товар	1	1.3	1.2	1	5
2 товар	1.5	1.8	1.7	3	7

α	L
0.9	1000

В случае квантильного критерия для двух реализаций:

f = φ
27.06

u_1	u_2
7.2	3.3

$y_{1-}^1(1)$	$y_{2-}^1(1)$	$y_{1+}^1(1)$	$y_{2+}^1(1)$
0	0	1.56	1.7
$y_{1-}^2(1)$	$y_{1-}^2(1)$	$y_{1+}^2(1)$	$y_{1+}^2(1)$
0	2.99	0	0

$u_1^1(2)$	$u_2^1(2)$	$y_{1-}^{11}(2)$	$y_{2-}^{11}(2)$	$y_{1-}^{12}(2)$	$y_{2-}^{12}(2)$
0	0	0	0	1.56	4.68
$u_1^2(2)$	$u_2^2(2)$	$y_{1-}^{21}(2)$	$y_{1-}^{21}(2)$	$y_{1-}^{22}(2)$	$y_{2-}^{22}(2)$
0	0	0	0	1.56	4.68

$y_{1+}^{11}(2)$	$y_{2+}^{11}(2)$	$y_{1+}^{12}(2)$	$y_{2+}^{12}(2)$	$z_1^1(1)$	$z_2^1(1)$
0	0	0	0	10.65	8.61
$y_{1+}^{21}(2)$	$y_{1+}^{21}(2)$	$y_{1+}^{22}(2)$	$y_{2+}^{22}(2)$	$z_1^2(1)$	$z_2^2(1)$
0	0	0	0	10.65	8.61

δ_1^1	δ_2^1
1	1
δ_1^2	δ_2^2
1	1

6. *Отзыв руководителя*

Отзыв руководителя о прохождении преддипломной практики А. В. Мамчур

В ходе выполнения преддипломной практики были решены все поставленные задачи в установленный срок. Разработана модель оптимизации поставок продукции. Для дискретного распределения случайных параметров получены эквивалентные смешанные целочисленные задачи. Написана программа для проведения вычислений. Считаю, что работа студентки А. В. Мамчур заслуживает оценки «отлично».

Доцент каф. 804, к.ф.-м.н. Иванов С. В.

27.04.2020

7. *Рекомендации по выбору темы квалификационной работы*

____
____
____
____
____

___00000000000000____ /_______________/ “___” февраля 2020 г.

(подпись руководителя практики) *(дата составления)*

8. *Для выполнения квалификационной дипломной работы во время практики мною подготовлены и изучены следующие материалы:*

1. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczy´nski A. Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. MPS/SIAM Series on Optimization. 9. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009.
2. С. В. Иванов, А. И. Кибзун, О сходимости выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными критериями, Автомат. и телемех., 2018, выпуск 2.
3. Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И. О сведении задачи квантильной оптимизации дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 66–86.
4. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
5. С. В. Иванов, А. И. Кибзун, Выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием, Тр. ИММ УрО РАН, 2017, том 23, номер 3, 134–143.
6. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
7. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. М.: Сов. Радио, 1979.
8. Наумов А.В., Бобылев И.М. О двухэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием и дискретным распределением вектора

случайных параметров // Автоматика и телемеханика. 2012. №2. С.61-72.

9. Pagnoncelli B.K., Ahmed S., Shapiro A. Sample Average Approximation Method for Chance Constrained Programming: Theory and Applications // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 142. P. 399-416.

10. Artstein Z., Wets R.J.-B. Consistency of minimizers and the SLLN for stochastic programs // J. Convex Anal. 1996. V. 2. P. 1–17.

___00000000000000____ /________________/ “__“ ________ 2020 г.

(подпись студента-практиканта) *(дата составления)*