МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Кафедра 804: «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»

Статистический анализ задачи планирования производства

Научный руководитель: доцент каф.804, к.ф.-м.н. Иванов С.В.
Студент: Мерзликина С.Д., группа 80-404Б

Москва,2019

Цели работы:

- Построение выборочных аппроксимаций для стохастической задачи планирования производства в различных постановках
- Разработка программной реализации алгоритмов решения полученных задач
- Теоретическое и экспериментальное исследование вопросов сходимости выборочных аппроксимаций к точному решению

Классическая постановка задачи

$$c^{\mathrm{T}}u \to \max_{u}$$

при ограничениях:

$$U = \{u \mid Au \leq b,\ u \geq 0\}$$

- c_j - стоимость единицы j-й продукции
- a_{ij} - затраты i-го ресурса для производства единицы j-й продукции
- b_i - объём ресурсов
- u_i - объём производства

Стохастические постановки

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$, где X_k- случайная стоимость продукции.

- Критерий в форме математического ожидания

$$M[X^T u] \to \max_{u \in U} \qquad (1)$$

- Вероятностный критерий

$$P\{X^T u \geq \varphi\} \to \max_{u \in U} \qquad (2)$$

- Критерий в форме квантили

$$\Phi_\alpha(u) = \min\{\varphi: \mathrm{P}\{-X^T u \leq \varphi\} \geq \alpha\} \to \min_{u \in U} \qquad (3)$$

$\alpha \in (0,1)$ – заданный уровень доверительной вероятности

$P\{\cdot\}$ – вероятностная мера, порождённая распределением случайного вектора X

Детерминированный эквивалент

Задача (1) эквивалентна:

$$\mu^{\mathrm{T}} u \ \rightarrow \ \max_{u \in U}$$

Если $X \sim N(\mu, \Sigma)$, то задача (3) эквивалентна:

$$-\mu^{\mathrm{T}} u + \ z_{\alpha} \sqrt{u^{\mathrm{T}} \Sigma u} \rightarrow \ \min_{u \in U} \qquad (4)$$

μ - вектор математического ожидания

Σ – ковариационная матрица

z_{α} - квантиль уровня *α* распределения *N(0,1)*

Описание выборочной аппроксимации

Пусть выборка $\{X_k\}_{k=1}^{n}$, порождена случайным вектором X с функцией распределения $F(x) = P\{X \ \leq x\}$.

$P_{\varphi}^{(n)}(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}\left(\max\{X_i^{\mathrm{T}}u - \varphi\}\right)$ - частота появления события $\{X^{\mathrm{T}}u \ \leq \varphi\}$

где:

$$\begin{cases} \chi_s(x) = 1, \ x \in S \\ \chi_s(x) = 0, \ x \notin S \end{cases}$$

Дискретная аппроксимация задачи вероятностной оптимизации: $P_{\varphi}^{(n)}(u) \ \rightarrow \max\limits_{u}$

Оценка функции квантили: $\varphi_{\alpha}^{(n)}(u) = \min\{\varphi\colon \ P_{\varphi}^{(n)}(u) \geq \ \alpha\}$

Аппроксимация задачи квантильной оптимизации: $\varphi_n = \ \min\limits_{u \in U} \varphi_{\alpha}^{(n)}(u), \ n \ \in \ \mathbb{N}$

Условия сходимости выборочных аппроксимаций

Утверждение 1 (Условия сходимости выборочных функций вероятности). Если множество U компактно и не пусто, то $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{u\in U} P_{\varphi}^{(n)}(u) = \alpha^*$ (п.н.) и любая предельная точка $\bar{u}^{\varphi}$ последовательности $\{u_n^{\varphi}\}_{n\in\mathbb{N}}$, в которой для всех $n \in \mathbb{N}$, оптимальна в задаче максимизации функции вероятности.

Утверждение 2 (Условия сходимости выборочных функций квантили). Если $P_{\varphi}(u) = P\{X^T u \leq \varphi\}$ – строго монотонная функция по φ и $X \sim N(\mu, \Sigma)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*$ (п.н.) и любая предельная точка $\bar{u}$ последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, в которой $u_n \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ оптимальна в задаче минимизации функции квантили.

Эквивалентные задачи математического программирования для выборочных аппроксимаций

Задача математического программирования для задачи (3):

$$\varphi \to \min_{u,\varphi,\delta}$$

$$\begin{cases} -x_i^{\mathrm{T}} u \le \varphi + L(1-\delta_i) \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i \ge \alpha \\ Au \le b \\ u \ge 0 \\ \delta_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n} \end{cases}$$

где L – большая константа

Эквивалентные задачи математического программирования для выборочных аппроксимаций (продолжение)

Задача математического программирования для задачи (2):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \to \max_u$$

$$\begin{cases} x_i^{\mathrm{T}}u \ \geq \ \varphi \ - L(1-\delta_i) \\ Au \ \leq b \\ u \geq 0 \\ \delta_i \ \in \{0,1\}, i = \ \overline{1,n} \end{cases}$$

где L – большая константа

Численный пример

Пусть кондитерской фабрике требуется определить оптимальную стратегию получения прибыли. Она изготавливает 4 вида карамельных изделий: $u_{1,}, u_2, u_3, u_4$. Используя при этом 4 вида основного сырья: сахарный песок, патоку, фруктовое пюре и сахарную свёклу.

Предположим, что вектор цен на реализованную продукцию имеет нормальное распределение $c \sim N(\mu, \Sigma)$.

При этом затраты сырья на изготовление изделий: A = $\begin{pmatrix} 62 & 71 & 54 & 21 \\ 18 & 42 & 68 & 64 \\ 56 & 28 & 59 & 49 \\ 43 & 45 & 73 & 77 \end{pmatrix}$.

Имеющийся запас сырья на фабрике: b = $(20\ 14\ 17\ 15)^{\mathrm{T}}$.

N	α	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*	$\varphi_\alpha(u^*)$	t, с
50	0,5	0	0,2709	0	0,0365	-76,7125	0,5205
	0,75	0	0,2709	0	0,0365	-76,0246	0,3756
	0,95	0	0,2709	0	0,0365	-75,3469	0,1544
100	0,5	0	0,2709	0	0,0365	-76,8680	0,9299
	0,75	0	0,2709	0	0,0365	-76,3295	3,1721
	0,95	0	0,2709	0	0,0365	-75,3096	0,4908
1 000	0,5	0	0,2709	0	0,0365	-76,7660	9,5413
	0,75	0	0,2709	0	0,0365	-76,1671	7,7477
	0,95	0	0,2709	0	0,0365	-75,3935	2,9380
10 000	0,5	0	0,2709	0	0,0365	-76,8064	7205,6557
	0,75	0	0,2709	0	0,0365	-76,2047	2419,3428
	0,95	0	0,2709	0	0,0365	-75,4077	943,1886
Точное решение	0,5	0	0,2709	0	0,0365	-76,7912	-
	0,75	0	0,2709	0	0,0365	-76,6073	-
	0,95	0	0,2709	0	0,0365	-76,3408	-

Таблица 1. Результаты квантильной оптимизации

N	φ	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*	$P(u^*)$	t, c
50	50	0	0,0948	0	0	1	0,1613
	75	0	0,2695	0	0,0373	0,96	0,0741
	125	0	0	0	0,1948	0	0,0716
100	50	0	0,1911	0	0	1	0,0740
	75	0	0,2703	0	0,0369	0,98	0,0944
	125	0	0	0	0,1948	0	0,0707
1 000	50	0	0,1911	0	0	1	0,1472
	75	0	0,2708	0	0,0365	0,9770	0,3576
	125	0	0,2703	0	0,0369	0	0,7865
10 000	50	0	0,2817	0	0	1	4,2146
	75	0	0,2709	0	0,0365	0,9820	8,7137
	125	0	0	0	0,1948	0	67,3404

Таблица 2. Результаты оптимизации вероятностного критерия

N	M	$\widehat{M}\widehat{\varphi}_N$	$\widehat{D}\widehat{\varphi}_N$
50	10	-76,0735	0,0016
	100	-76,7987	0,0023
	1000	-76,7960	0,0024
100	10	-76,7970	0,0003
	100	-76,7957	0,0024
	1000	-76,7846	0,0019

Таблица 3. Статистические оценки φ^*

Результаты работы

- Исходные задачи стохастического программирования планирования производства с критериями в форме вероятности и квантили сведены к эквивалентным задачам смешанного целочисленного математического программирования
- Для решения задачи с непрерывным распределением применен метод выборочной аппроксимации, доказаны утверждения о его сходимости
- На численных примерах подтверждена теоретическая сходимость