Оптимизация надежности линейных оценок при наличии случайных параметров и помех с неизвестным унимодальным распределением

Архипов Александр Сергеевич, гр. 8О-404Б

Московский Авиационный Институт
Факультет прикладной математики и физики
Кафедра теории вероятностей

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Семенихин К.В.

Москва
2017г.

Постановка задачи

1. Описать многомерную линейную модель наблюдения с вектором помех, имеющим неизвестное унимодальное распределение
2. Решить задачу минимаксного оценивания с вероятностным критерием
3. Определить наихудшее распределение вектора помех
4. Провести численный эксперимент для сравнения надежности оценок при разных распределениях помех

Описание модели

Рассмотрим многомерную линейную модель наблюдения :

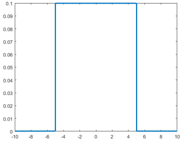
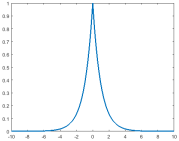
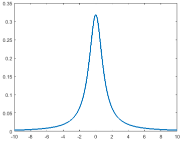
$$\begin{cases} X = \langle a, \theta \rangle \\ Y = B\theta + \eta \end{cases} \tag{1}$$

в которой используются следующие обозначения:
$X \in \mathbb{R}$ — оцениваемая величина;
$Y \in \mathbb{R}^n$ — вектор наблюдений;
$\theta \in \mathbb{R}^p$ — неслучайный вектор неизвестных параметров;
$a \in \mathbb{R}^p$ — известный вектор коэффициентов;
$B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ — заданная матрица регрессии.
$\eta \in \mathbb{R}^n$ — вектор случайных ошибок наблюдений (помех)
Распределение вектора η принадлежит классу многомерных унимодальных симметричных распределений

$$\mathbf{Law}(\eta) \in \mathcal{U}_s(0; \sigma_\eta^2 I), \tag{2}$$

$\mathcal{U}_s(0;\sigma^2)$— класс симметричных, унимодальных одномерных распределений скалярной величины ξ : $\mathbf{M}\xi = 0$ и $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$

$$f_\xi(x) = p\delta(x) + (1-p)f(x), \tag{3}$$

$\mathcal{U}_s(0,\sigma^2 I)$— класс многомерных унимодальных распределений ξ : $\mathbf{M}\xi = 0$ и $\mathbf{cov}\{\xi\} = \sigma^2 I$.

Определение

Распределение случайного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ унимодально если $\forall\lambda \in \mathbb{R}^n$ величина $\langle\lambda,\xi\rangle$ унимодальна.

Теорема

Для $\xi \sim \mathcal{U}_s(0, \sigma^2)$

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq h\} \leq \begin{cases} \frac{4\sigma^2}{9h^2} & \text{если } h^2 \geq \frac{4}{3}\sigma^2 \\ 1 - \frac{h}{\sigma\sqrt{3}} & \text{если } h^2 \leq \frac{4}{3}\sigma^2. \end{cases}$$

Наихудшее распределение случайной величины $\xi \sim \mathcal{U}_s(0, \sigma^2)$:

$$\xi \sim \begin{cases} \mathcal{R}(-\sigma\sqrt{3}, \sigma\sqrt{3}) & \text{,если } h \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma \\ \frac{4}{3h^2}\mathcal{R}(\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}) + (1 - \frac{4}{3h^2})\delta_0(x) & \text{,если } h \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma. \end{cases}$$

где $h > 0$ — заданная верхняя граница ошибки оценивания.

Задача минимаксного оценивания

Для модели наблюдений выполнено условие :

$$B\theta = 0 \Rightarrow \langle a, \theta \rangle = 0, \qquad (4)$$

Введем линейную оценку

$$\tilde{X} = \langle f, Y \rangle + c$$

где $f \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Определим вероятностный критерий нахождения оценки:

$$\mathbf{P}\{\mid X - \tilde{X} \mid \leq h\}, \qquad (5)$$

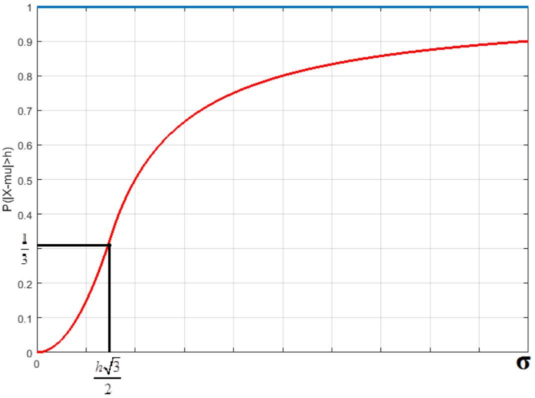
где h— заданный порог ошибки оценивания.
Будем использовать минимаксный подход :

$$(\tilde{f}, \tilde{c}) \in \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}} \ \sup_{\mathbf{P}_\eta \in \mathcal{U}_s(0; \sigma_\eta^2 I), \theta \in \mathbb{R}^p} \mathbf{P}\{\mid X - \langle f, Y \rangle - c \mid \geq h\} \qquad (6)$$

Верхняя граница вероятностного критерия

Пусть $\xi \sim \mathcal{U}_s(0;\sigma^2)$, тогда функция

$$\overline{\mathbf{p}}_h(\sigma) = \sup_{\xi \in \mathcal{U}_s(0;\sigma^2)} \overline{\mathbf{p}}(|\xi| \geq h) = \begin{cases} \frac{4\sigma^2}{9h^2} & \text{если } h^2 \geq \frac{4}{3}\sigma^2 \\ 1 - \frac{h}{\sigma\sqrt{3}} & \text{если } h^2 \leq \frac{4}{3}\sigma^2. \end{cases}$$



Лемма 1

Пусть в рассматриваемой модели (1) используется критерий (5), тогда оценку $\hat{X}$ имеет смысл искать только лишь в классе линейных несмещенных оценок вида : $\hat{X} = \langle \hat{f}, Y \rangle$.
Условие несмещенности оценки $\hat{X}$ эквивалентно тому, что $B^* \hat{f} = a$.

Лемма 2

Пусть $\varepsilon = X - \langle f, Y \rangle \sim \mathcal{U}_s(0, \sigma^2)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\mathbf{D}\varepsilon = \mathbf{J}(f) = \sigma^2$. Тогда для любого $h > 0$ будет выполняться:

$$\sup_{\varepsilon \sim \mathcal{U}_s(0,\sigma^2)} \mathbf{P}\{|X - \langle f, Y \rangle| \geq h\} = \begin{cases} \frac{4\sigma^2}{9h^2} & \text{если } h^2 \geq \frac{4}{3}\sigma^2 \\ 1 - \frac{h}{\sigma\sqrt{3}} & \text{если } h^2 \leq \frac{4}{3}\sigma^2. \end{cases} \quad (7)$$

Задача 1

Пусть задан произвольный вектор $b \in \mathbb{R}^n$ и величина $x \in \mathbb{R}$. Требуется найти вектор $y \in \mathbb{R}^n$ с минимальной нормой, такой что линейная форма $\langle b, y \rangle = x$.

Ответ:

$$y = \frac{b}{|b|^2} x \tag{8}$$

Задача 2

Пусть задан произвольный вектор $b \in \mathbb{R}^n$ и величина $x \in \mathbb{R}$. Требуется найти все векторы $y \in \mathbb{R}^n$ такие что линейная форма $\langle b, y \rangle = x$.

Ответ: $y = \frac{b}{|b|^2} x + (I - \frac{bb^*}{|b|^2}) z$, где $z \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор.

Задача 2

Пусть задан фиксированный вектор $b \in \mathbb{R}^n$ и случайная величина ξ:

$$\xi \sim \mathcal{U}_s(0, \sigma_\eta^2 |b|^2) \tag{9}$$

Найти случайный вектор $\eta \in \mathbb{R}^n$: $\langle \eta, b \rangle = \xi, \eta \sim \mathcal{U}_s(0, \sigma_\eta^2 I)$

Вектор η имеет вид :

$$\eta = \frac{b}{|b|^2}\xi + (I - \frac{bb^*}{|b|^2})\zeta \tag{10}$$

где $\zeta \sim (0, \sigma_\eta^2 I)$, а так же ξ и ζ некоррелированы.

$$\widetilde{b} = \frac{b}{|b|^2} \quad A = (I - \frac{bb^*}{|b|^2}) \tag{11}$$

Тогда $\eta_k = \widetilde{b}_k \xi + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\zeta_i$.

В зависимости от порога h и ср.кв. отклонения σ плотность будет иметь вид

$$f_{\xi+\zeta_i}(x) = \frac{p}{2c}[F_{\zeta_i}(c-x) + F_{\zeta_i}(c+x)] + qf_{\zeta_i}(x)$$

.
или

$$f_{\xi+\zeta_i}(x) = \frac{p}{2c}[F_{\zeta_i}(c-x) + F_{\zeta_i}(c+x)]$$

.
Если $\zeta_i \sim \mathcal{N}(0, d_i)$ тогда получим :

$$f_{\xi+\zeta_i}(x) = \frac{p}{2c}\left[\mathbf{\Phi}\left(\frac{x+c}{\sqrt{d_i}}\right) - \mathbf{\Phi}\left(\frac{x-c}{\sqrt{d_i}}\right)\right] + \frac{q}{\sqrt{2\pi d_i}}e^{\frac{-x^2}{2d_i}} \quad (12)$$

где $\mathbf{\Phi}(x)$— функция Лапласа.

Минимаксная оценка

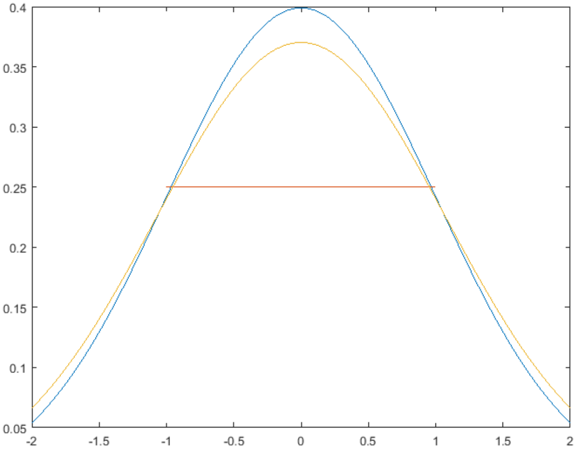


Рис.: Графики функций $f_{\xi+\zeta_i}(x)$— синий, $f_\xi(x)$— красный, $f_{\zeta_i}(x)$— желтый

Теорема (Основная)

Пусть в модели (1) вектор помех $\eta \sim \mathcal{U}_s(0, \sigma_\eta^2 I)$, тогда

1. $\widehat{X} = \langle \widehat{f}, Y \rangle$— линейная оценка, где МНК-оценка $\widehat{f} = (aB^+)^*$ является минимаксной на классе аффинных операторов оценивания.

$$\hat{f} = \arg\min_{f \in \mathbb{R}^n} \sup_{\mathbf{P}_\eta \in \mathcal{U}_s(0;\sigma_\eta^2 I), \theta \in \mathbb{R}^p} \mathbf{P}\{\mid X - \langle f, Y \rangle - C \mid \geq h\}$$

.

2. Наихудшее распределение вектора помех имеет вектор η:

$$\eta = \frac{\hat{f}}{|\hat{f}|^2}\xi + (I - \frac{\hat{f}\hat{f}^*}{|\hat{f}|^2})\zeta \tag{13}$$

где $\zeta \sim \mathcal{U}_s(0; \sigma_\eta^2 I)$ а ξ и ζ некоррелированы.

Рассмотрим трехмерное движение центра масс ЛА $Y(t) = \mathrm{col}[y_1(t), y_2(t), y_3(t)]$ в декартовой системе координат.

$$\begin{cases} y_1(t) = \theta_1 + \theta_2 t \\ y_2(t) = \theta_3 + \theta_4 t \\ y_3(t) = \theta_5 \end{cases} \tag{14}$$

где $\theta = \mathrm{col}[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]$ — вектор неизвестных детерминированных параметров. Опорный вектор значений $\theta^0 = \mathrm{col}[500, 5000, 500, 10500, 2000]$.

Таким образом:

$$Y_t = B_t\theta + \eta_t \ , \quad t = 0, \dots, T \tag{15}$$

где Y_t— вектор значений наблюдений в момент времени t, B_t— матрица регрессии в момент времени t, имеющая вид

$$B_t = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$\eta_t = \mathrm{col}[\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t)]$— реализация вектора помех в момент времени t.

Введем следующие обозначения

$$\begin{gathered} Y = \mathrm{col}[Y_0, \dots, Y_T] \in \mathbb{R}^{3(T+1)\times 1}, \\ B = \mathrm{col}[B_0, \dots, B_T] \in \mathbb{R}^{3(T+1)\times 5}, \\ \eta = \mathrm{col}[\eta_0, \dots, \eta_T] \in \mathbb{R}^{3(T+1)\times 1}, \\ X = \theta_1 + T\theta_2 + 0\theta_3 + 0\theta_4 + 0\theta_5 \ \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда если $T = 10$, то модель системы:

$$\begin{cases} X = \langle a, \theta \rangle \\ Y = B\theta + \eta \end{cases} \tag{18}$$

где $a = [1, T, 0, 0, 0]$, $X \in \mathbb{R}$ — оцениваемая величина, $Y \in \mathbb{R}^{3(T+1)\times 1}$ — вектор наблюдений;
Численнный эксперимент проводлся для трех вариантов вектора помех:

а) Гауссовское: $\eta \sim \mathcal{N}(0, 30I)$
б) Равномерное: $\eta \sim \mathcal{R}_n(-3\sqrt{10}, 3\sqrt{10})$
в) Наихудшее: $\eta = \frac{\hat{f}}{|\hat{f}|^2}\xi + (I - \frac{\hat{f}\hat{f}^*}{|\hat{f}|^2})\zeta$

где $\hat{f} = [1, 10, 0, 0, 0]$, а

$$\xi \sim \begin{cases} \mathcal{R}(\sigma\sqrt{3}, \sigma\sqrt{3}) & \text{если} \quad | h | \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma \\ \frac{4}{3h^2}\mathcal{R}(\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}) + (1 - \frac{4}{3h^2})\delta_0(x) & \text{если} \quad | h | \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma. \end{cases}$$

$,\sigma^2 = \sigma_\eta^2 \langle (B^*B)^{-1}a, a\rangle$, $\zeta \sim \mathcal{N}(0, 30I)$

Таблица: Значения вероятности $\mathbf{P}\{|X - \tilde{X}| \geq h\}$ для трех вариантов вектора помех : а)Гауссовские б)Равномерные в)Наихудшие

h	N	а	б	в
0.5	1000	0.8730	0.8660	0.9500
	5000	0.8656	0.8726	0.9360
	10000	0.8724	0.8748	0.9372
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1000	0.7080	0.7210	0.8450
	5000	0.7136	0.7102	0.8546
	10000	0.7077	0.7184	0.8526
3	1000	0.3500	0.3340	0.6200
	5000	0.3268	0.3496	0.6552
	10000	0.3297	0.3417	0.6538
5	1000	0.1170	0.1070	0.2730
	5000	0.0966	0.1046	0.2854
	10000	0.1063	0.1035	0.2812

Результаты

1. Определен вид наихудшего распределения из класса $\mathcal{U}_s(0, \sigma^2 I)$ для вектора помех в многомерной линейной модели наблюдений.
2. Исследованы свойства устойчивости относительно сложения случайных величин из класса $\mathcal{U}_s(0, \sigma^2 I)$.
3. Проведен численный эксперимент.