

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

*Выпускная квалификационная
работа на тему:*

«Алгоритмы условно-минимаксной
фильтрации для слежения за траекторией
маневрирующей цели»

Руководитель: профессор кафедры 804 Семенихин К.В.
Дипломник: группа 08-604 Новикова В.С.

Москва 2016

Цель работы

- Разработка алгоритма оценивания траектории маневрирующей цели на основе метода условно-минимаксной фильтрации с учетом доступных наблюдению пеленгационных измерений.
- Разработка программного обеспечения для численного синтеза условно-минимаксного фильтра, реализующего оценку траектории в указанной модели наблюдения.

Движение маневрирующей цели

$$X_k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \Omega h}{\Omega} & 0 & -\left(\frac{1 - \cos \Omega h}{\Omega}\right) & 0 \\ 0 & \cos \Omega h & 0 & -\sin \Omega h & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos \Omega h}{\Omega} & 1 & \frac{\sin \Omega h}{\Omega} & 0 \\ 0 & \sin \Omega h & 0 & \cos \Omega h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X_{k-1} + v_k$$

$X = [\xi \ \dot{\xi} \ \eta \ \dot{\eta} \ \Omega]$ – вектор состояния

ξ, η – декартовы координаты

$\dot{\xi}, \dot{\eta}$ – скорости движения по оси абсцисс и оси ординат

Ω – угловая скорость движения ЛА

h – временной интервал между двумя последовательными измерениями

$$v_k \sim N(0, Q_v) \text{ – белый шум, } Q_v = \begin{pmatrix} q_1 M & 0 & 0 \\ 0 & q_2 M & 0 \\ 0 & 0 & q_2 h \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \frac{h^3}{3} & \frac{h^2}{2} \\ \frac{h^2}{2} & h \end{pmatrix}$$

Модель наблюдения

$$Y_k = \begin{pmatrix} \arccos \left(\frac{\xi_k - s_1}{\sqrt{(\xi_k - s_1)^2 + (\eta_k - s_2)^2}} \right) \\ \arccos \left(\frac{\xi_k - u_1}{\sqrt{(\xi_k - u_1)^2 + (\eta_k - u_2)^2}} \right) \end{pmatrix} + w_k$$

ξ_k, η_k – декартовы координаты

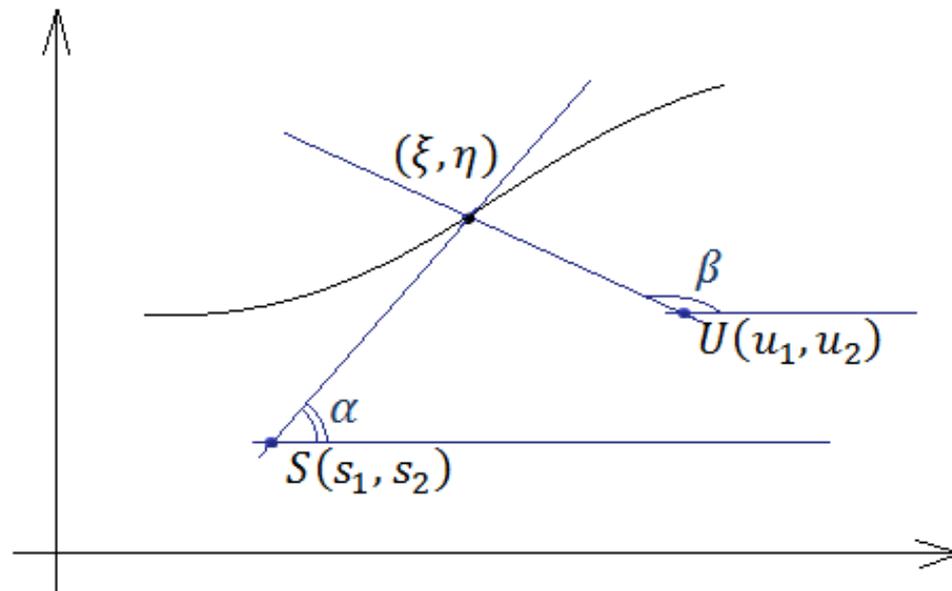
s_1, s_2 – координаты пеленгатора, находящегося в точке S

u_1, u_2 – координаты пеленгатора, находящегося в точке U

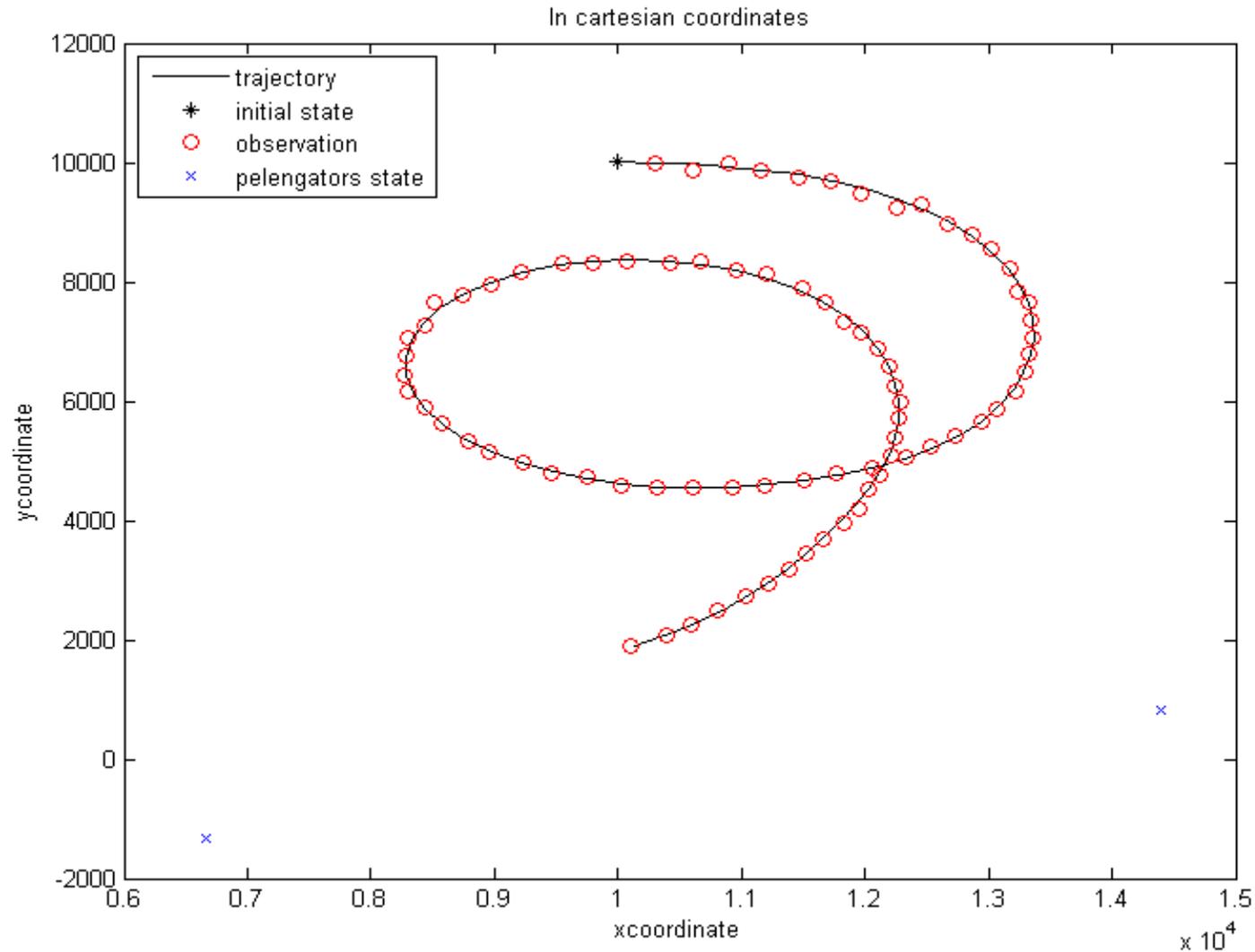
$w_k \sim N(0, Q_w)$ – белый шум

$$Q_w = \begin{pmatrix} \sigma_{w_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{w_2}^2 \end{pmatrix}$$

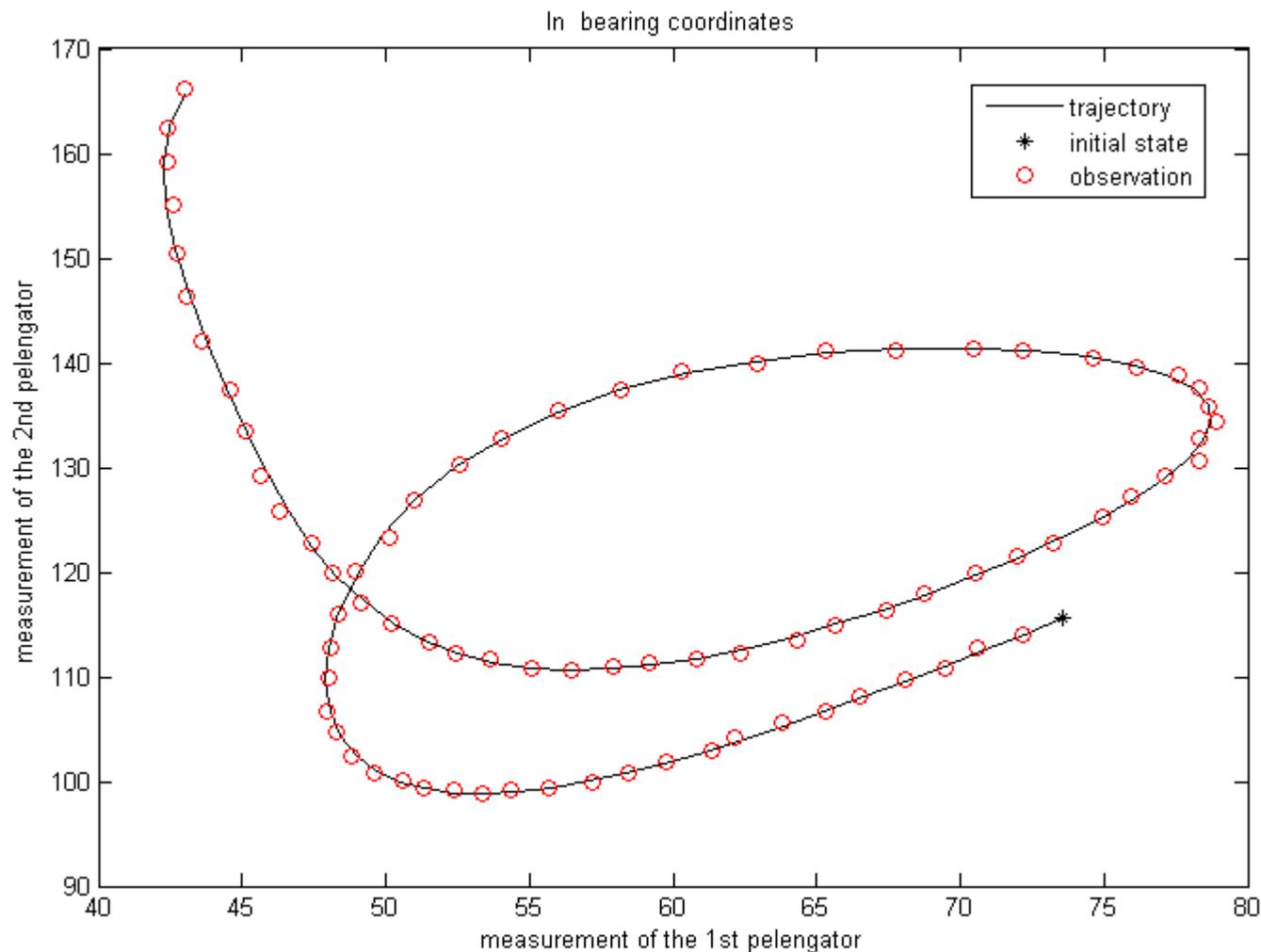
$\sigma_{w_1}^2, \sigma_{w_2}^2$ – известные параметры



Траектория движения в декартовых координатах



Траектория движения в координатах наблюдения



Реализация расширенного фильтра Калмана (РФК)

$$\begin{cases} X_k = \varphi(X_{k-1}) + v_k & \text{— вектор состояния} \\ Y_k = \psi(X_k) + w_k & \text{— наблюдения} \end{cases}$$

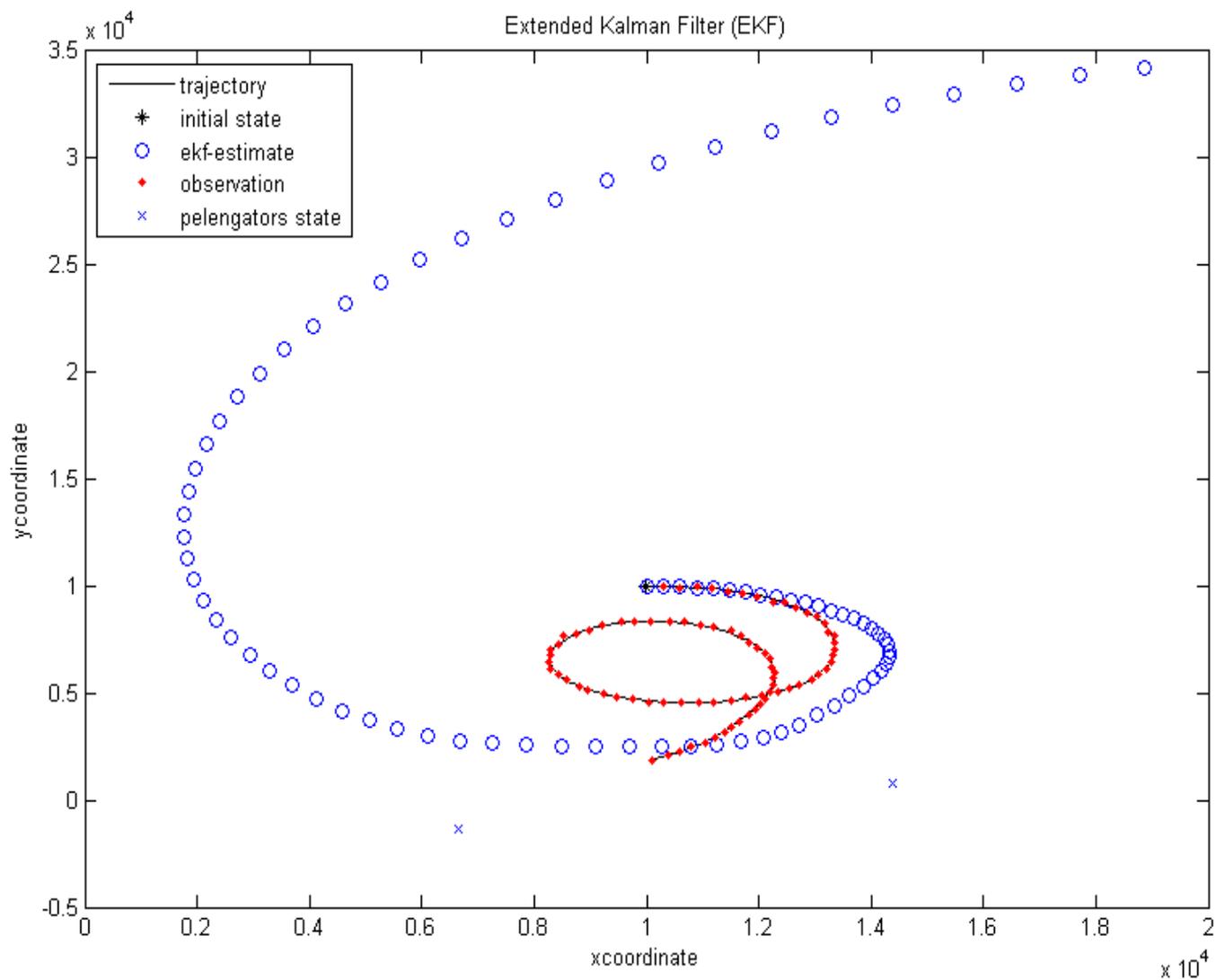
Идея: применить фильтр Калмана к линеаризованным выражениям

$$\begin{cases} X_k \approx \varphi(\hat{X}_{k-1}) + A_k(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) + v_k, \\ Y_k \approx \psi(\bar{X}_k) + C_k(X_k - \bar{X}_k) + w_k, \end{cases} \quad A_k = \left. \frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} \right|_{\hat{X}_{k-1}}, \quad C_k = \left. \frac{\partial \psi(X)}{\partial X} \right|_{\bar{X}_k}$$

РФК-оценка $\hat{X}_k = \text{«прогноз»} + \text{«коррекция»}$

$$\begin{cases} \hat{X}_k = \bar{X}_k + F_k(Y_k - \psi(\bar{X}_k) + w_k), & \text{— РФК-оценка} \\ \bar{X}_k = \varphi(\hat{X}_{k-1}) + v_k, & \text{— прогноз} \\ F_k = P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + D_w)^{-1}, & \text{— коэффициент усиления фильтра} \\ P_k = A_k \Delta_{k-1} A_{k-1}^T + D_v, & \text{— ковариационная матрица прогноза} \\ \Delta_k = P_k - P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + D_w)^{-1} C_k P_k. & \text{— ковариационная матрица} \\ & \text{ошибки РФК-оценки} \end{cases}$$

График траектории и ее РФК-оценки



Реализация сигма-точечного фильтра Калмана

$$\begin{cases} X_k = \varphi(X_{k-1}) + v_k & \text{— вектор состояния} \\ Y_k = \psi(X_k) + w_k & \text{— наблюдения} \end{cases}$$

Прогноз: $\varphi^{(i)} = \varphi(\hat{X}_{k-1} + \Sigma\gamma^{(i)})$, где $\Sigma: \Sigma\Sigma^T = \Delta_{k-1}$,

$$\bar{X}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi^{(i)}, \quad P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi^{(i)} - \bar{X}_k)(\varphi^{(i)} - \bar{X}_k)^T + Q_v.$$

Коррекция: $\psi^{(i)} = \psi(\bar{X}_k + S\gamma^{(i)})$, $S: SS^T = P_k$,

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi^{(i)}, \quad R_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S\gamma^{(i)} \cdot (\psi^{(i)} - \bar{Y}_k)^T,$$

$$R_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi^{(i)} - \bar{Y}_k) \cdot (\psi^{(i)} - \bar{Y}_k)^T + Q_w, \quad F_k = R_{XY}R_Y^+.$$

Оценка: $\hat{X}_k = \bar{X}_k + F_k(Y_k - \bar{Y}_k), \quad \Delta_k = P_k - F_kR_YF_k^T.$

Выбор сигма-точек. Равновероятный случай.

Объем: $M = 2m + 1$, где $m = 5$ – число состояний.

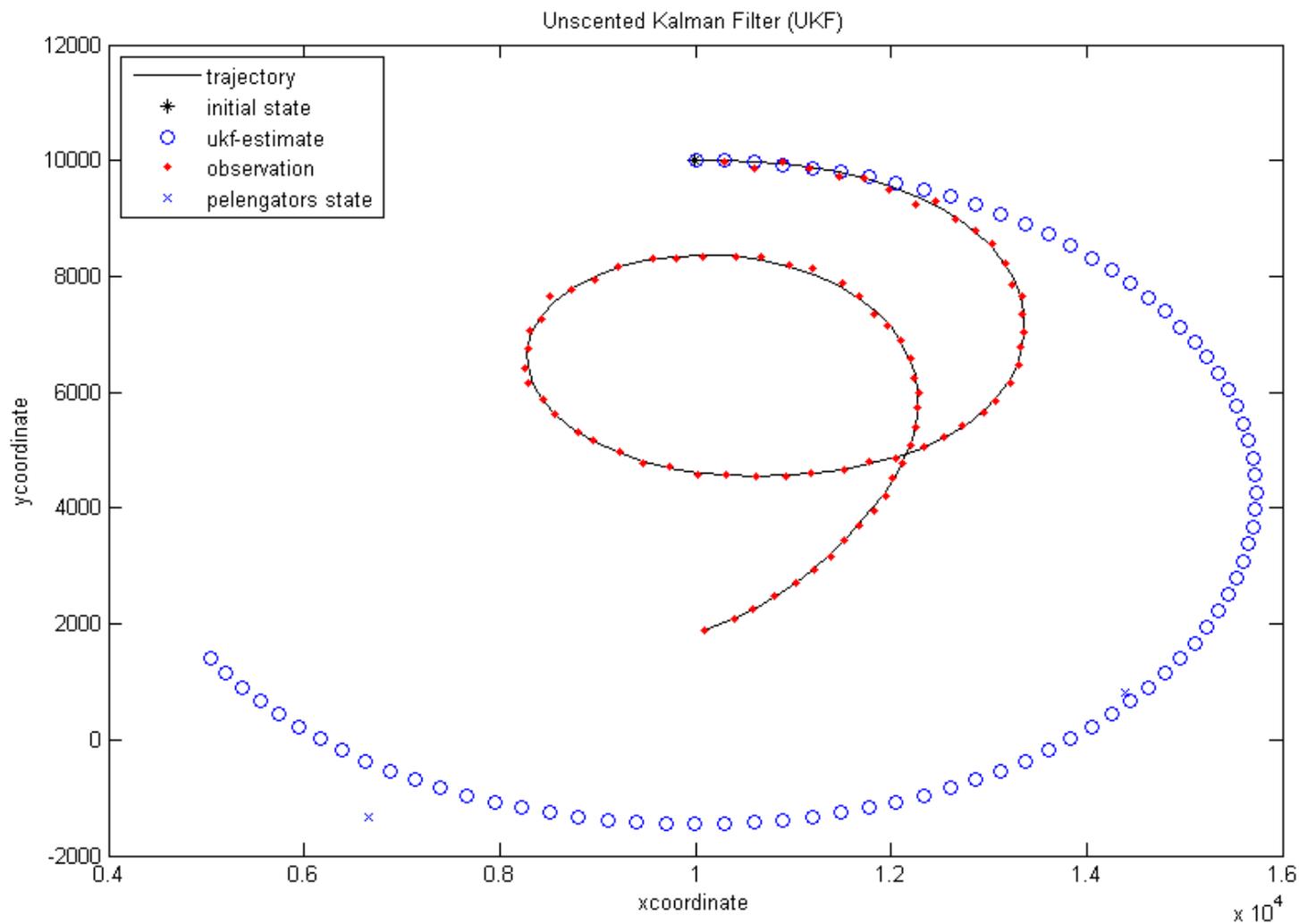
Идея: $Law(\Theta) \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \delta_{\gamma^{(j)}}$, где $M\Theta = 0$, $K_{\Theta} = I$

Найдем сигма-точки по правилу:

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{M}{2}} e^{(j)}, & j = 1, \dots, m, \\ -\sqrt{\frac{M}{2}} e^{(j-m)}, & j = m + 1, \dots, 2m, \\ 0, & j = 2m + 1, \end{cases}$$

$e^{(j)}$ – стандартный базис.

График траектории и ее СТФК-оценки



Выбор сигма-точек с модой в нуле.

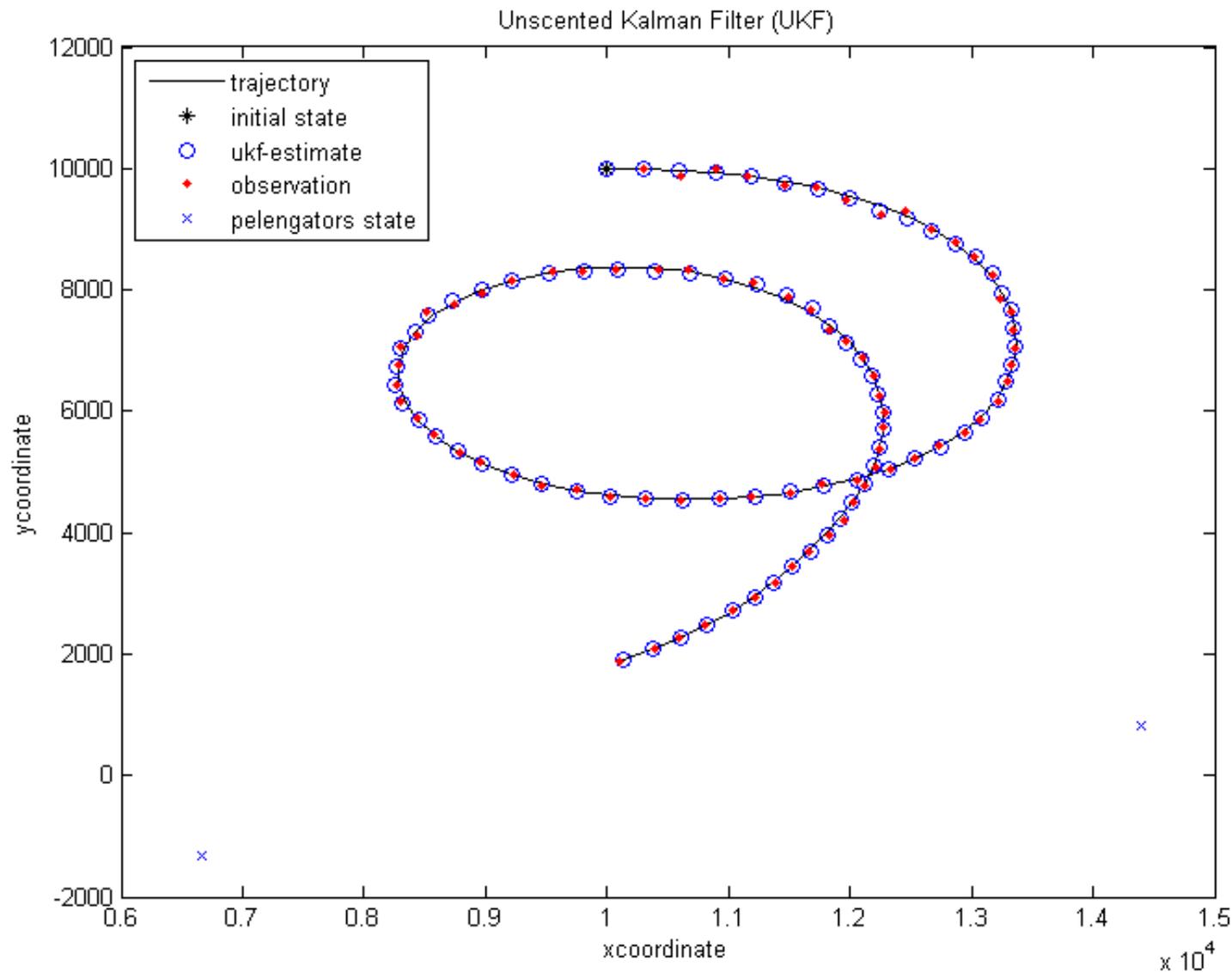
Идея: $Law(\Theta) \approx p\delta_0 + \frac{1-p}{2m} \sum_{j=1}^{2m} \delta_{\gamma^{(j)}}$, причем $p \gg \frac{1-p}{2m}$

Найдем сигма-точки по правилу:

$$\gamma^{(j)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{1-p}} e^{(j)}, & j = 1, \dots, m, \\ -\sqrt{\frac{m}{1-p}} e^{(j-m)}, & j = m+1, \dots, 2m, \\ 0, & j = 2m+1, \end{cases}$$

$e^{(j)}$ – стандартный базис.

График траектории и ее СТФК-оценки



Реализация условно-минимаксного фильтра

$$\begin{cases} X_k = \varphi(X_{k-1}) + v_k \\ Y_k = \psi(X_k) + w_k \end{cases}$$

Прогноз: $\varphi^{(i)} = \varphi(\hat{X}_{k-1} + \Sigma \gamma^{(i)}), \quad \Sigma: \Sigma \Sigma^T = \Delta_{k-1},$

$\gamma^{(i)}$ – выборка стандартных нормальных векторов

$$\bar{X}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi^{(i)}, \quad P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi^{(i)} - \bar{X}_k)(\varphi^{(i)} - \bar{X}_k)^T + Q_v.$$

Коррекция: $\psi^{(i)} = \psi(\bar{X}_k + S \gamma^{(i)}), \quad S: S S^T = P_k,$

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi^{(i)}, \quad R_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S \gamma^{(i)} \cdot (\psi^{(i)} - \bar{Y}_k)^T,$$

$$R_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi^{(i)} - \bar{Y}_k) \cdot (\psi^{(i)} - \bar{Y}_k)^T + Q_w, \quad F_k = R_{XY} R_Y^+.$$

Оценка: $\hat{X}_k = \bar{X}_k + F_k (Y_k - \bar{Y}_k), \quad \Delta_k = P_k - F_k R_Y F_k^T.$
--

График траектории и ее УМФ-оценки

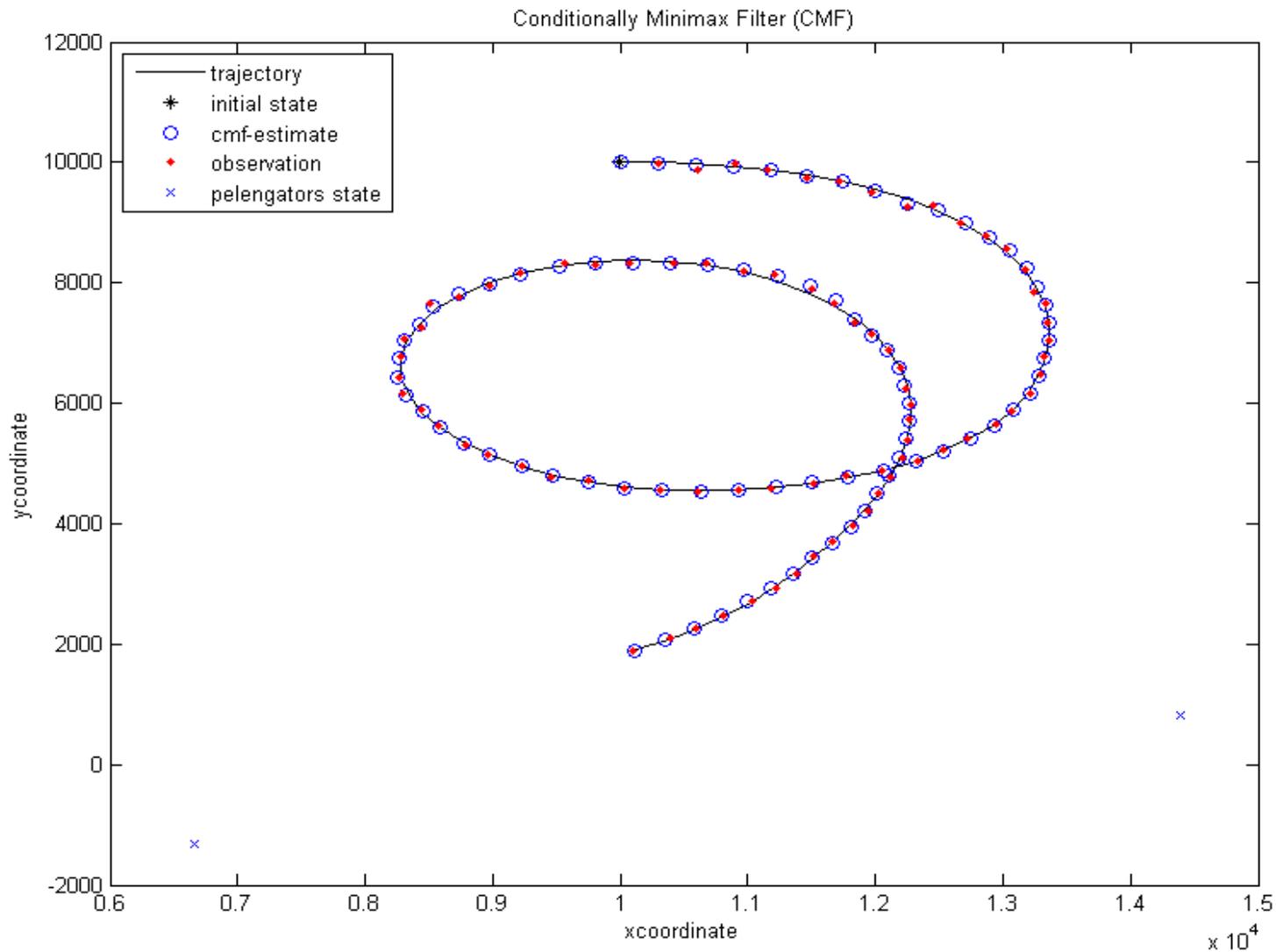


График ошибки условно-минимаксного фильтра для координаты ξ

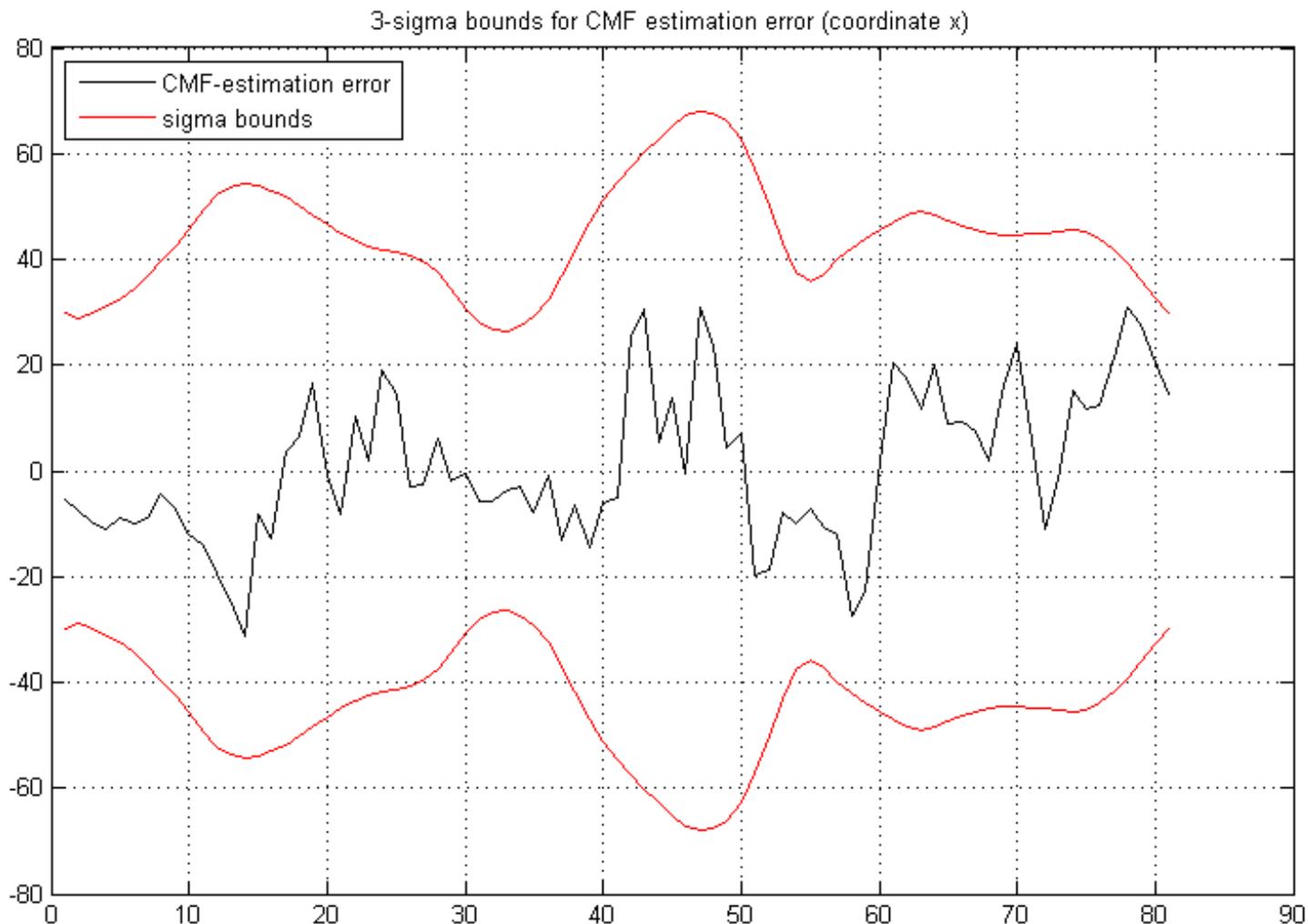


График ошибки условно-минимаксного фильтра для координаты η

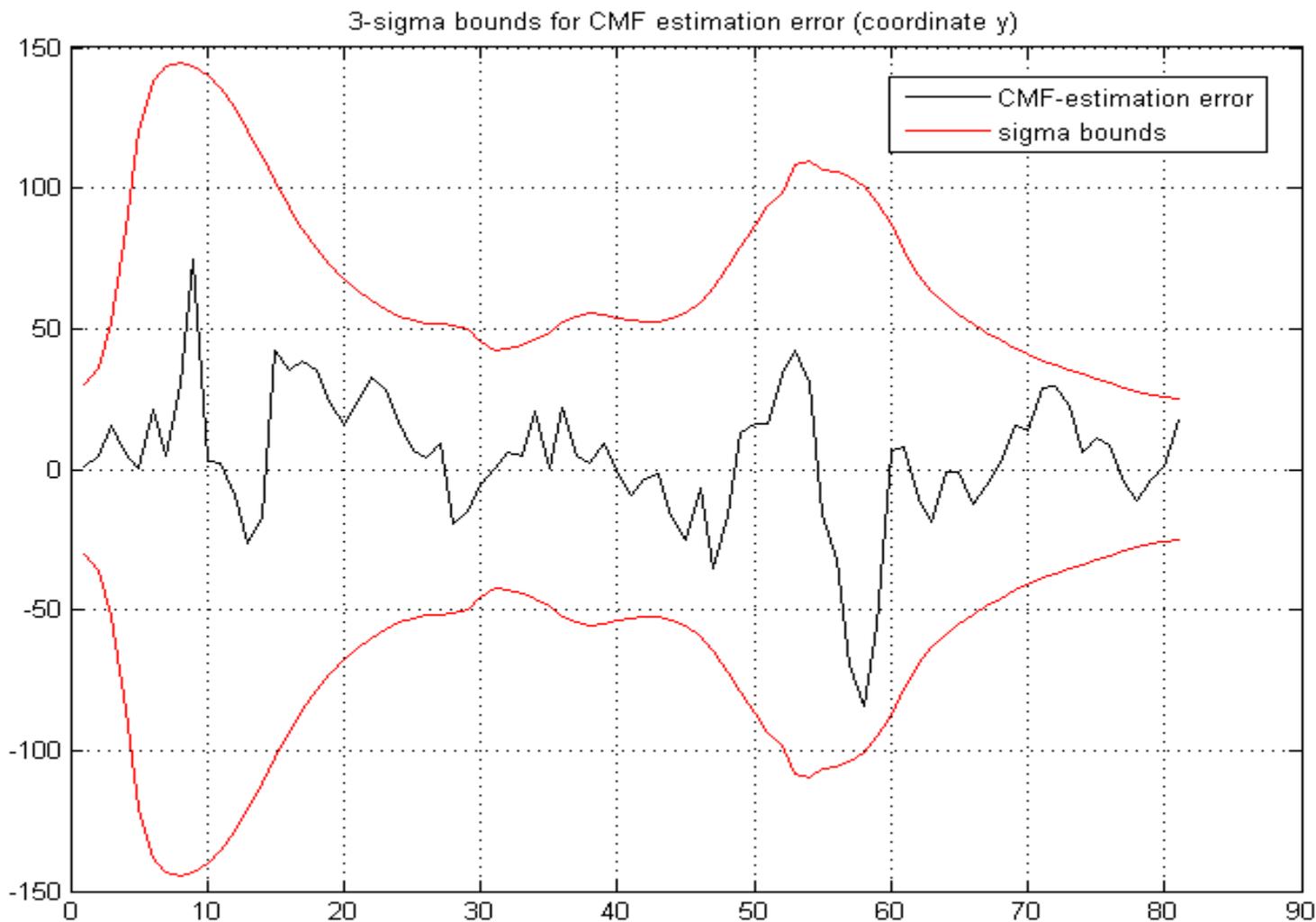


График ошибки условно-минимаксного фильтра для скорости по координате ξ

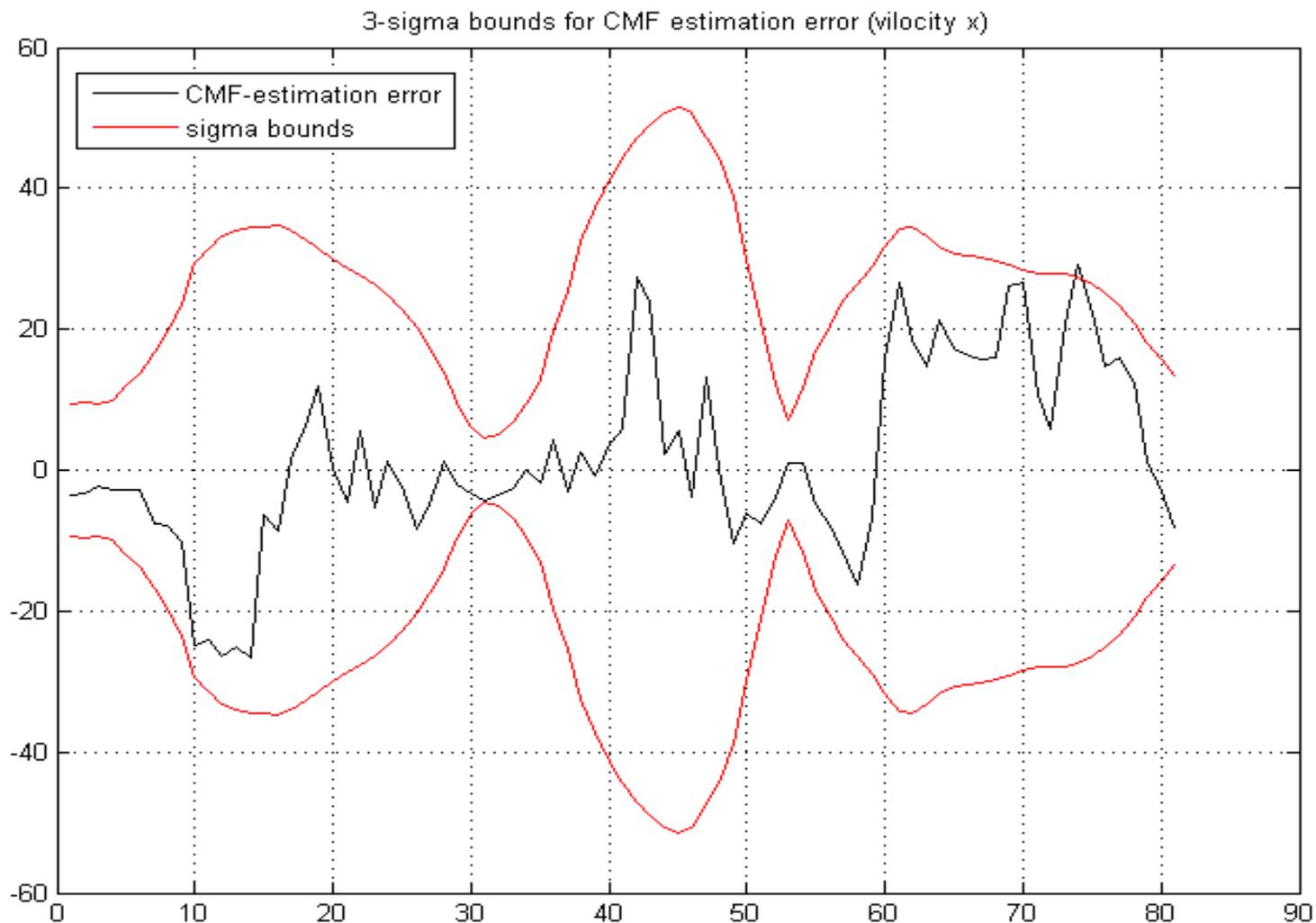


График ошибки условно-минимаксного фильтра для скорости по координате η

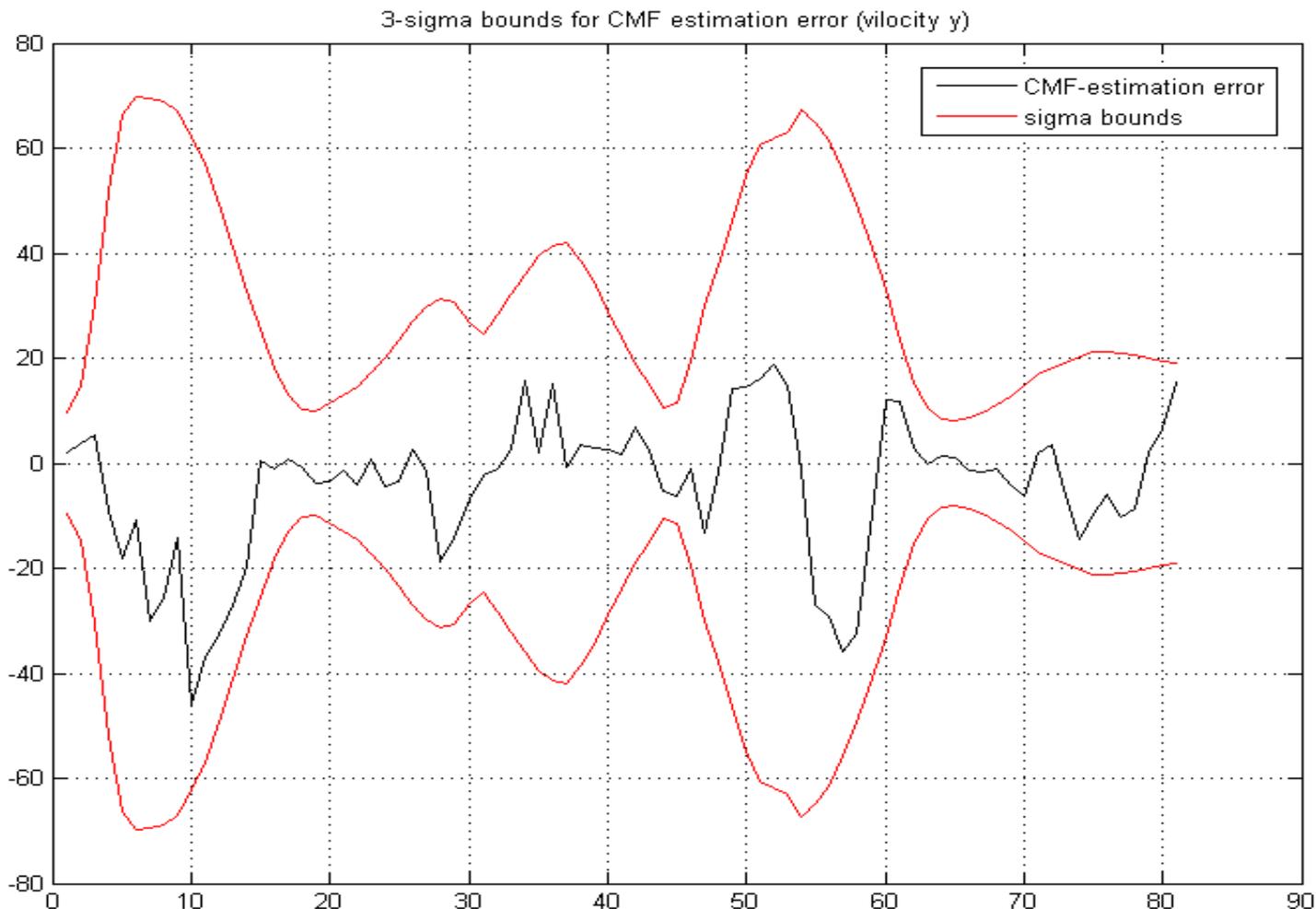
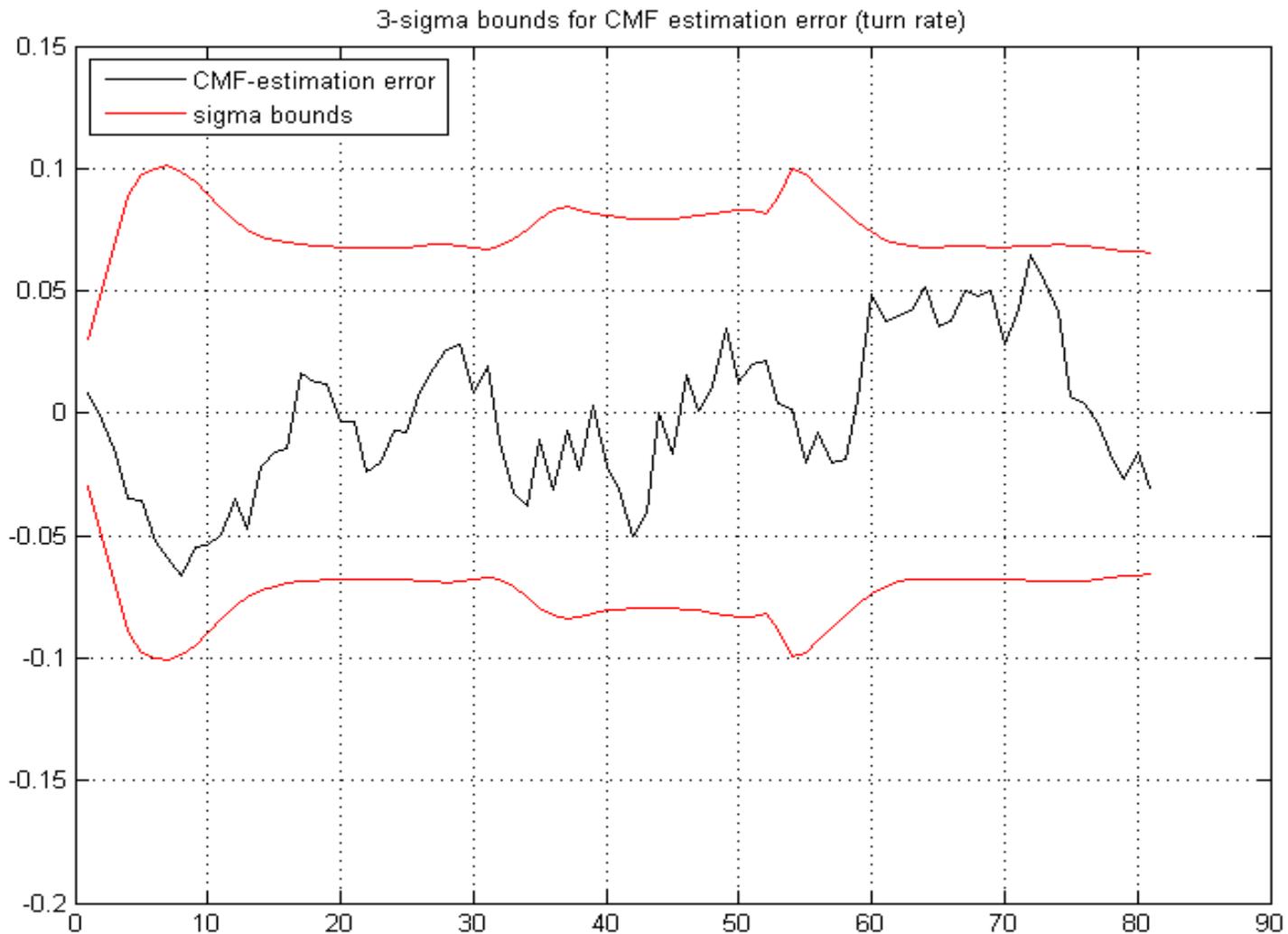
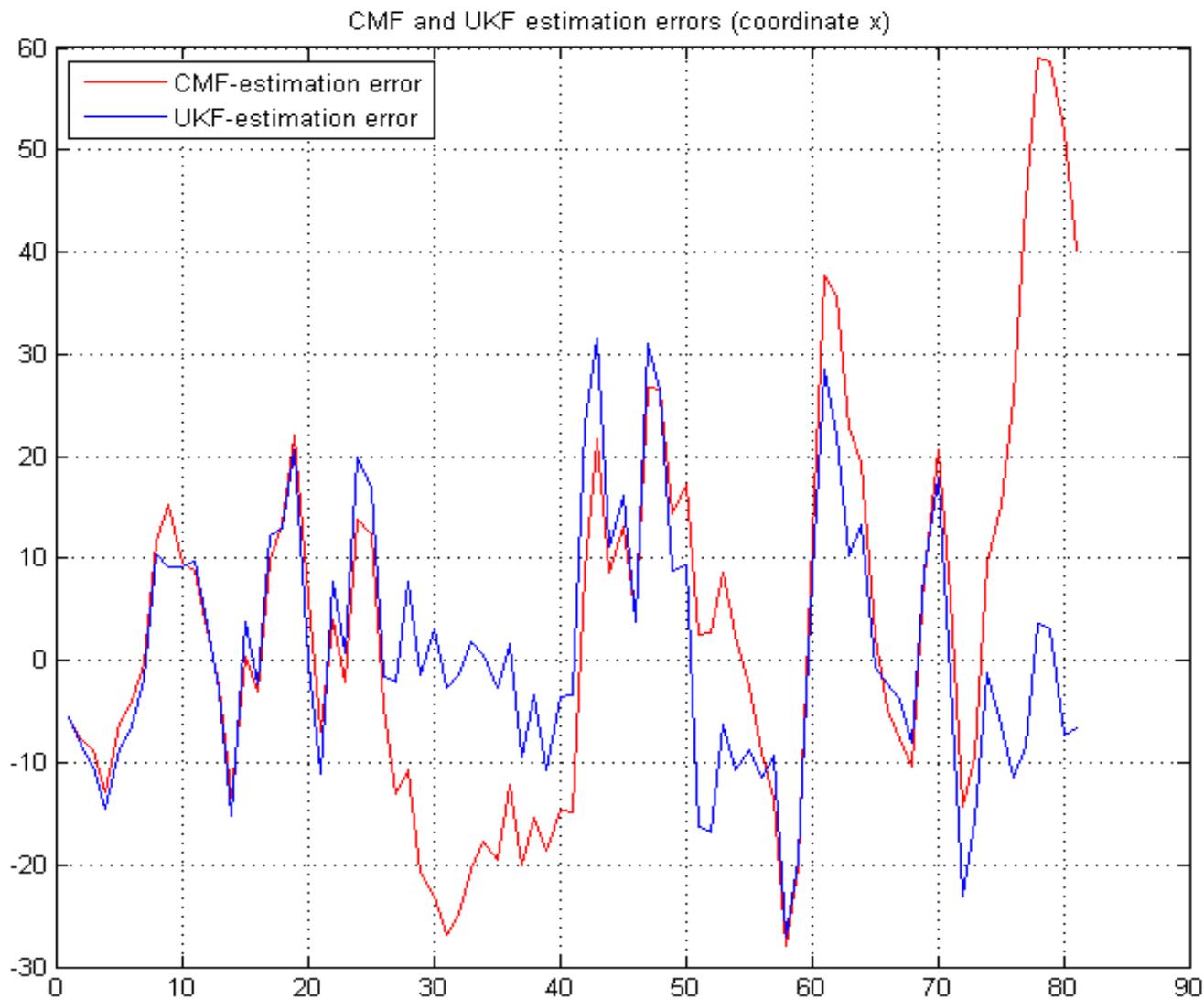


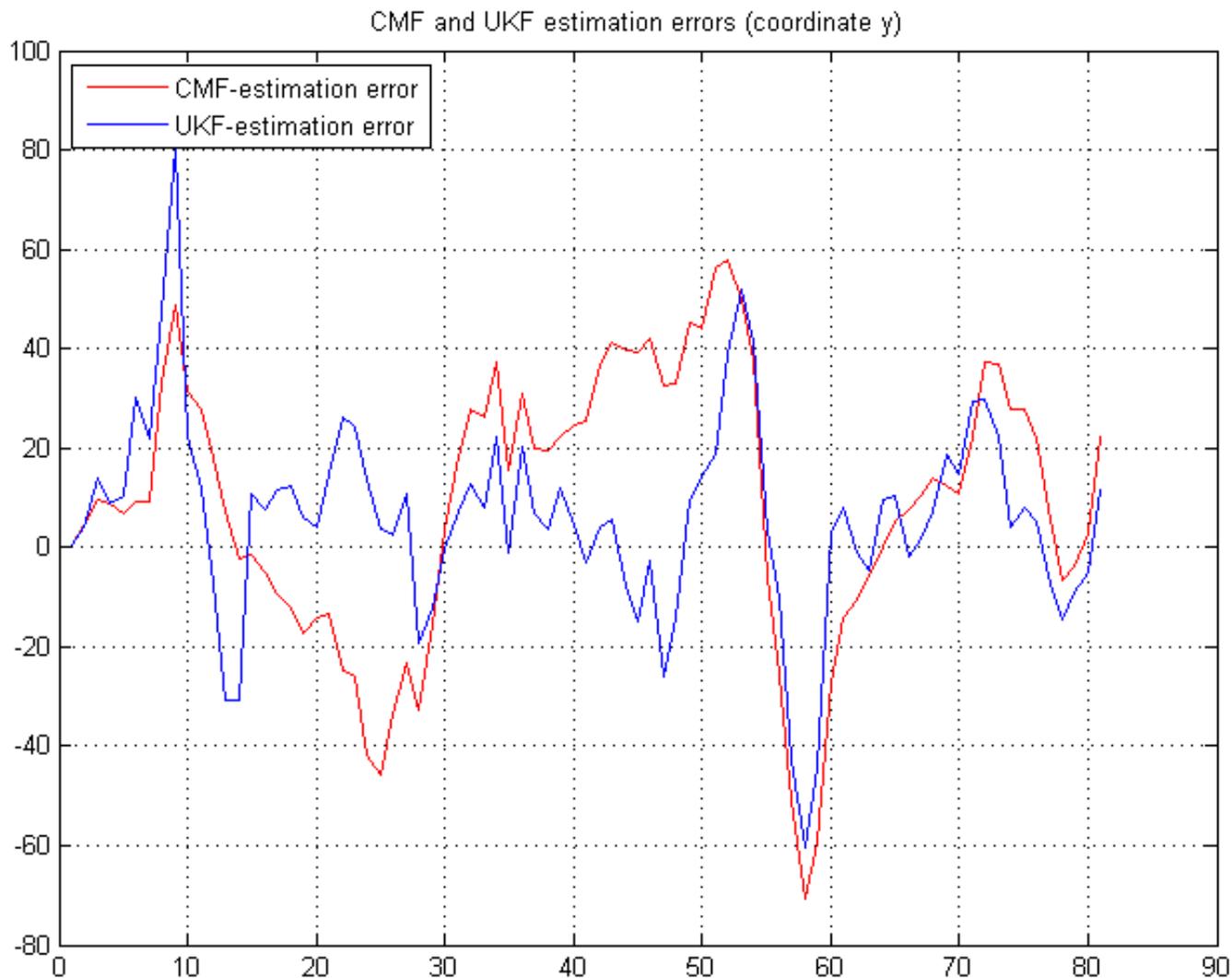
График ошибки условно-минимаксного фильтра для угловой скорости Ω



Сравнение ошибки для координаты ξ



Сравнение ошибки для координаты η



Заключение

- Были численно реализованы и исследованы расширенный фильтр Калмана, сигма-точечный фильтр Калмана (три варианта) и условно-минимаксный нелинейный фильтр.
- Разработано программное обеспечение для численного синтеза условно-минимаксного фильтра, реализующего оценку траектории в указанной модели наблюдения.
- Проведенное сравнение ошибок оценки сигма-точечного фильтра и оценки условно-минимаксного фильтра, показало, что оба фильтра дают точную оценку местонахождения самолета (координаты ξ и η).
- Ошибки оценки условно-минимаксного фильтра для координат, скорости по каждой координате и угловой скорости находятся внутри интервала $(-3\sigma; 3\sigma)$

Спасибо за внимание!