Задача квантильной оптимизации ограниченного по времени тестирования

Черыгова Е.Е. - студентка группы 8О-404Б
Наумов А.В. - проф., д.ф.-м.н.

Московский авиационный институт
Факультет информационные технологии и прикладная математика
Кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования

Москва, 2018

1. Модели времени ответа пользователя СДО. Непрерывная модель Ван дер Линдена

Пусть:

- T_{ij} - случайная величина, обозначающая время ответа j-го пользователя на i-ю задачу;
- β_i - индивидуальная сложность рассматриваемого задания;
- τ_j - физиологические особенности пользователя;
- μ - общая составляющая для всех пользователей и заданий;
- ε_{ij} - случайное отклонение.

Логарифм времени ответа *j*-го пользователя на *i*-е задание имеет вид

$$\ln T_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{I} \beta_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{J} \tau_j = 0, \qquad (1)$$

где ε_{ij}, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$ - независимые случайные величины, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ имеет гауссовское распределение. Таким образом

$$T_{ij} \sim LogN(\mu + \beta_i + \tau_j, \sigma^2).$$

2. Модели времени ответа пользователя СДО. Непрерывная модель Ван дер Линдена (продолжение)

Оценки параметров модели:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{J}\sum\limits_{i=1}^{I} \ln t_{ij}}{IJ}, \quad \hat{\beta}_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{J} \ln t_{ij}}{J} - \hat{\mu}, \tag{2}$$

$$\hat{\tau}_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{I} \ln t_{ij}}{I} - \hat{\mu}, \quad \hat{\sigma^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{J}\sum\limits_{i=1}^{I} (\ln t_{ij} - \hat{\tau}_j - \hat{\beta}_i - \hat{\mu})^2}{IJ} \tag{3}$$

Логнормальная модель времени ответа j-го пользователя на i-е задание с плотностью вероятности вида

$$f(x, \hat{\tau}_j, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\hat{\sigma^2}}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x - (\hat{\mu} + \hat{\beta}_i + \hat{\tau}_j)}{\sqrt{\hat{\sigma^2}}}\right]^2\right\} \tag{4}$$

3. Модели времени ответа пользователя СДО. Дискретизация времени ответа универсального пользователя на задание.

Обозначим через T_i - случайное время ответа универсального пользователя на i-е задание. Пусть T_i принимает свои значения на интервале $(\underline{t}, \bar{t})$ действительной прямой $(-\infty, \infty)$ и назначено $L_i - 1$ порогов дискретизации разбивающих интервал $(\underline{t}, \bar{t})$ на L подынтервалов (t_{l-1}, t_l), $l = 1, \ldots, L_i$, полагаем $t_0 = \underline{t}, t_L = \bar{t}$

$$0 = \underline{t} < t_1 < t_2 < \ldots < t_{l-1} < t_l < \ldots < t_{L_i-1} < \bar{t} = +\infty.$$

Тогда непрерывной случайной величине T_i может быть сопоставлена дискретная случайная величина Θ_i, определяемая рядом распределения

θ_i^l	θ_i^1	θ_i^2	$\ldots$	$\theta_i^{L_i}$
p_l	p_1	p_2	$\ldots$	p_{L_i}

где θ_l^i середины интервалов (t_{l-1}, t_l), а $p_l = \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} f(t, \tau, \beta_i, \sigma)dt$ - соответствующие им вероятности, $l = 1, \ldots, L_i$.

4. Постановка задачи определения оптимального набора ограниченных по времени тестовых заданий

Пусть существует множество $Z = (z_1, \dots, z_I)$ из I заданий, разделенных на M различных типов, I_m - число заданий m-го типа, тогда $\sum\limits_{m=1}^{M} I_m = I$, $m = 1, \dots, M$. Для обозначения принадлежности задания к определенному типу введем матрицу A размерности $I \times M$:

$$A = \| a_i^m \|, a_i^m = \begin{cases} 1, & z_i \in Z_m, \\ 0, & z_i \notin Z_m. \end{cases}$$

Пусть $u \in R^I$ вектор принадлежности задания к тесту:

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{если задача } i \text{ попала в тестовый набор,} \\ 0, & \text{если задача } i \text{ не попала в тестовый набор.} \end{cases}$$

Определим вектор $w \in R^I$, i-я координата которого является сложностью i-го задания. Пусть c - суммарная сложность теста и k - количество заданий в тесте, $k \geqslant M$.

Рассмотрим вектор $\Theta \in R^I$:

$$\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_I)^T.$$

Будем предполагать, что случайные величины Θ_i, $i = 1, \ldots, I$ являются независимыми.
Пусть общее время на выполнение теста неизвестно. Обозначим его через φ. Рассмотрим функцию квантили:

$$\Phi_\alpha(u) \stackrel{\triangle}{=} min\{\varphi : P\{\Theta^T u \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}. \quad (5)$$

6. Постановка задачи (продолжение)

$$u_\alpha = Arg \min_{u \in \{0,1\}^I} \gamma \frac{| \, c - w^T u \, |}{\varepsilon} + (1-\gamma) \frac{\Phi_\alpha(u)}{2700}, \tag{6}$$

$$\varphi_\alpha = \min_{u \in \{0,1\}^I} \gamma \frac{| \, c - w^T u \, |}{\varepsilon} + (1-\gamma) \frac{\Phi_\alpha(u)}{2700}, \tag{7}$$

$$c - w^T u \leqslant \varepsilon, \tag{8}$$

$$w^T u - c \leqslant \varepsilon, \tag{9}$$

$$A^T u \geqslant e_M, \tag{10}$$

$$e^T u = k, \tag{11}$$

где $(\cdot)^T$ - операция транспонирования, $\gamma \in (0,1)$ - весовой коэффициент, $\alpha \in (0,1)$ - заданный уровень доверительной вероятности, $e \in R^I$, $e = (1, \ldots, 1)^T$, $e_M \in R^M$, $e_M = (1, \ldots, 1)^T$.

7. Сведение исходной задачи в дискретном случае к задаче частично целочисленного математического программирования

$$u^* = Arg \min_{u\in\{0,1\}^I,\ \varphi\geqslant 0,\ \delta\in\{0,1\}^D} \gamma \frac{|\ c - w^T u\ |}{\varepsilon} + (1-\gamma)\frac{\varphi}{2700}, \qquad (12)$$

$$(\theta^d)^T u - \varphi \leqslant ((\theta^d)^T e)\delta_d, \quad d = 1,\ldots,D, \quad D = \prod_{i=1}^{I} L_i, \qquad (13)$$

$$|c - w^T u| \leqslant \varepsilon, \qquad (14)$$

$$A^T u \geqslant e_M, \qquad (15)$$

$$e^T u = k, \qquad (16)$$

$$p^T \delta \leqslant 1 - \alpha,\ \delta = (\delta_1,\ldots,\delta_D), \qquad (17)$$

$$p = (p_1,\ldots,p_D), p_d = P(\Theta = \theta_d) = \prod_{i=1}^{I} P(\Theta_i = \theta_i^d), \qquad (18)$$

где $e \in R^I, e = (1,\ldots,1)^T, e_M \in R^M, e_M = (1,\ldots,1)^T, \theta^d \in R^I$ - реализация случайного вектора Θ, $p \in R^D$ - вероятности появления соответствующих реализаций дискретной СВ Θ, $\delta \in \{0,1\}^D$ - вектор булевых переменных для перебора α-доверительных множеств, L_i - число возможных реализаций СВ Θ_i.

8. Алгоритм поиска оптимального набора заданий

1. Составить множество $\overline{U}$ всех u, удовлетворяющих неравенствам (14) - (16):

$$\overline{U} \triangleq \{u \in R^I : c - w^T u \leqslant \varepsilon,\ w^T u - c \leqslant \varepsilon,\ A^T u \geqslant e_M,\ e^T u = k,\ u \in \{0,1\}^I\};$$

2. Для каждого $u^s \in \overline{U}$ решить задачу

$$\psi_s^* = \min_{\varphi_s \geqslant 0,\ \delta_s \in \{0,1\}^B} \gamma \frac{|c - w^T u^s|}{\varepsilon} + (1-\gamma)\frac{\varphi_s}{2700},$$

$$(\varphi_s^*, \delta_s^*) = arg \min_{\varphi_s \geqslant 0,\ \delta_s \in \{0,1\}^B} \gamma \frac{|c - w^T u^s|}{\varepsilon} + (1-\gamma)\frac{\varphi_s}{2700},$$

$$(\theta_s^b)^T e - \varphi \leqslant ((\theta_s^b)^T e)\delta_{sb}, \quad b = 1, \ldots, B, \quad B = \prod_{i: u_i^s \neq 0} L_i,$$

$$p_s^T \delta_s \leqslant 1 - \alpha,$$

$$p_s = (p_{s1}, \ldots, p_{sB}), \quad p_{sb} = P(\Theta_s = \theta_s^b) = \prod_{i: u_i^s \neq 0} P(\Theta_i = \theta_i^b),$$

$$\delta_s = (\delta_{s1}, \ldots, \delta_{sB}),$$

$e \in R^k, e = (1, \ldots, 1)^T, \theta_s^b \in R^k, b = 1, \ldots, B$ - реализация случайного вектора Θ_s, являющегося подвектором исходного вектора Θ, состоящего из координат $\Theta_i : u_i^s \neq 0$, $\Theta_s \in R^k$, $p_s \in R^B$ - вектор со значениями, равными вероятностям появления соотвествующей реализации дискретной случайной величины Θ_i, $i : u_i^s \neq 0$, $\delta_s \in \{0,1\}^B$ - вектор булевых переменных для перебора α-доверительных множеств, L_i - число возможных реализаций СВ Θ_i;
3. Среди всех ψ_s^* выбираем наименьшее $(\psi_{s^*}^*)$;
4. Полагаем решение исходной задачи (12)-(18) равным $u_{s^*}^*, \psi_{s^*}^*, \varphi_{s^*}^*, \delta_{s^*}^*$.

Таблица: Количество наборов заданий, удовлетворяющих детерминированным ограничениям

ε	Кол-во решений, удов. дет. огр.	Оптимальное решение ψ^* при $\gamma = 0.5$	Оптимальный набор заданий при $\gamma = 0.5$	Оптимальное решение ψ^* при $\gamma = 0$	Оптимальный набор заданий при $\gamma = 0$
$4 \cdot 10^{-4}$	3	0,6658	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,5815	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
$5 \cdot 10^{-4}$	3	0,5908	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,5815	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
$6 \cdot 10^{-4}$	3	0,5408	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,5815	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
$7 \cdot 10^{-4}$	3	0,5050	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,5815	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
$8 \cdot 10^{-4}$	4	0,4783	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,5102	$z_5^1, z_8^2, z_7^3, z_8^3, z_{10}^3$
$9 \cdot 10^{-4}$	6	0,4574	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,5023	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$
$1 \cdot 10^{-3}$	7	0,4408	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,5023	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$
$2 \cdot 10^{-3}$	21	0.3658	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,4919	$z_6^1, z_7^1, z_4^2, z_7^3, z_8^3$
$3 \cdot 10^{-3}$	30	0.3408	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,4710	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$
$4 \cdot 10^{-3}$	35	0.3283	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,4710	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$

10. Результаты численного эксперимента (продолжение)

Таблица: Зависимость значения критериальной функции от γ для $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$

γ	Оптимальный набор заданий	Значение критерия ψ^*	γ	Оптимальный набор заданий	Значение критерия ψ^*
0	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	0,4710	0.55	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,3029
0.05	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	0,4775	0.60	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,2776
0.1	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,4721	0.65	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,2523
0.15	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,4570	0.70	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,2270
0.20	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,4418	0.75	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,2016
0.25	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,4267	0.80	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,1763
0.30	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,4116	0.85	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,1510
0.35	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,3965	0.9	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,1257
0.40	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,3789	0.95	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,1003
0.45	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0,3536	1	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,0750
0.50	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0,3283			

11. Результаты численного эксперимента (продолжение)

Рисунок: Зависимость значения критериальной функции от γ для $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$

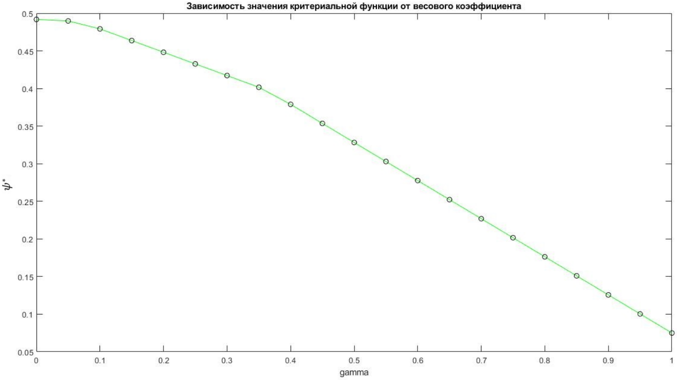

Таблица: Результат численного эксперимента для $\gamma = 0$

ε	Оптимальный набор заданий	φ^* (секунды)	φ^* (минуты)	Значение критерия ψ^*
0.0004	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	1570.0833	26.1681	0.5815
0.0005	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	1570.0833	26.1681	0.5815
0.0006	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	1570.0833	26.1681	0.5815
0.0007	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	1570.0833	26.1681	0.5815
0.0008	$z_5^1, z_8^2, z_7^3, z_8^3, z_{10}^3$	1377.6667	22.9611	0.5102
0.0009	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	1356.2	22.6033	0.5023
0.001	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	1356.2	22.6033	0.5023
0.002	$z_6^1, z_7^1 7, z_4^2, z_7^3, z_8^3$	1328.025	22.1337	0.4919
0.003	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	1271.775	21.1963	0.4710
0.004	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	1271.775	21.1963	0.4710

13. Результаты численного эксперимента (продолжение)

Таблица: Время выполнения алгоритма

ε	Затраченное время (секунды)	ε	Затраченное время (секунды)
0.0004	4.189767	0.0009	7.365371
0.0005	4.648206	0.001	8.716812
0.0006	4.521878	0.002	23.158336
0.0007	4.178228	0.003	34.178394
0.0008	5.498839	0.004	39.744152

14. Результаты Выпускной квалификационной работы

- предложена постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимальным временем выполнения. Задача сформулирована в терминах одноэтапной задачи квантильной оптимизации;
- предложен алгоритм решения сформулированной задачи, основанный на её декомпозиции, позволяющий существенно сократить время решения задачи;
- получены результаты численного эксперимента, подтверждающие адекватность предложенной модели;
- опубликованы тезисы в сборнике докладов "XLIII Гагаринских чтений";
- подготовлена статья для публикации в журнале "Вестник компьютерных и информационных технологий".