МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСТИТЕТ

Выпускная квалификационная работа на тему: «Применение корректирующих коэффициентов для устранения неоднородности выборок»

Руководитель: старший преподаватель. каф. 804, Осокин А. В.

Дипломник: студент группы 8О-404Б, Полуян А. В.

Москва, 2015г

Постановка задачи

Рассматривается процесс тестирования знаний учащихся.

Начальные данные:

- Количество заданий в тесте – 20.
- Имеется экспертная оценка сложности заданий. Задания имеют различный уровень сложности: от 1 до 5.
- Сложность задания соответствует максимальному количеству баллов, которое можно получить за его выполнение.
- Средняя сложность тестового варианта – 3.

Требуется:

- Получить все выборки заданий, отвечающие заданным условиям.
- Обнаружить неоднородные выборки.
- Минимизировать необъективность баллов испытуемых, вызванную неоднородностью выборок заданий.

Проблема неоднородности выборок заданий

	Уровень подготовленности	Сложность заданий в тесте	Средняя сложность теста	Результат студента
Студент I	3	3	3	высокий
Студент II	4	1 и 5	3	низкий

Согласно модели тестирования Г. Раша, вероятность успеха более подготовленного испытуемого должна быть выше вероятности успеха менее подготовленного испытуемого.

Разделение выборок на группы

Метрика:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i^1 - x_i^k)^2}$$

С помощью критерия χ^2 было установлено, что выборки из группы I и выборки из группы III неоднородны.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\5\\5\end{pmatrix}}_{\text{I группа}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\3\\4\\4\\4\\4\\4\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\5\\5\\5\\5\\5\\5\\5\\5\end{pmatrix}}_{\text{II группа}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\3\\4\\4\\4\\4\\4\\4\\5\\5\\5\\5\\5\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\5\\5\\5\\5\\5\\5\\5\\5\\5\\5\end{pmatrix}}_{\text{III группа}}$$

Условные обозначения

$x^{\mathrm{I,j}}$ – j-ая выборка заданий из I группы, $\mathrm{j} = 1, \dots, m$.

$x^{\mathrm{III,k}}$ – k-ая выборка заданий из III группы, $\mathrm{k} = 1, \dots, n$.

z – трендовый вектор.

$\alpha_{x_i^{\mathrm{I,j}}}$ – коэффициент, соответствующий i-ому элементу выборки $x^{\mathrm{I,j}}$.

$s_{x^{\mathrm{I,j}}}$ – вектор первичных баллов, заработанных студентом за выполнение заданий тестового варианта $x^{\mathrm{I,j}}$.

$F_{x^{\mathrm{I,j}}}$ – сумма первичных баллов студента, выполнявшего тестовый вариант $x^{\mathrm{I,j}}$.

$R_{x^{\mathrm{I,j}}}$ – итоговая сумма баллов студента, выполнявшего тестовый вариант $x^{\mathrm{I,j}}$, которая получится в результате пересчёта баллов.

Алгоритм устранения неоднородности методом тренда

1) $\forall$ i ϵ 1,…,20 решается следующая задача минимизации:

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{m}(x_i^{\mathrm{I,j}}-z_i)^2+\sum_{\mathrm{k}=1}^{n}(x_i^{\mathrm{III,k}}-z_i)^2\to\min_{z_i}$$

В таком случае:

$$z_i=\frac{\sum_{j=1}^{m}x_i^{\mathrm{I,j}}+\sum_{k=1}^{n}x_i^{\mathrm{III,k}}}{\mathrm{m}+n}$$

2) Вычисляются коэффициенты:

$$\alpha_{x_i^{\mathrm{I,j}}}=\frac{z_i}{x_i^{\mathrm{I,j}}}\ ,\qquad \alpha_{x_i^{\mathrm{III,k}}}=\frac{z_i}{x_i^{\mathrm{III,k}}}$$

3) Если заданиям одного уровня сложности соответствуют одинаковые коэффициенты, то результирующий балл испытуемых рассчитывается по формуле:

$$R_{x^{\mathrm{I,j}}}=\sum_{i=1}^{20}s_{x_i^{\mathrm{I,j}}}\cdot\alpha_{x_i^{\mathrm{I,j}}}\ ,\qquad R_{x^{\mathrm{III,k}}}=\sum_{i=1}^{20}s_{x_i^{\mathrm{III,k}}}\cdot\alpha_{x_i^{\mathrm{III,k}}}$$

В противном случае, пересчёт баллов происходит по особому правилу.

Правило пропорций

Заданиям с одинаковым уровнем сложности могут соответствовать разные коэффициенты.

↓

Необходимо учитывать, сколько разных коэффициентов соответствует заданиям одного уровня сложности, а также веса этих коэффициентов.

↓

Как между собой количественно относятся коэффициенты, соответствующие заданиям одного уровня сложности, так же между собой соотносятся доли первичных баллов, на которые умножаются коэффициенты.

Алгоритм пересчёта баллов по правилу пропорций

1) Просуммировать первичные баллы, заработанные испытуемым за задания одного уровня сложности.
2) Разделить полученную сумму на доли в таком же соотношении, как и количественно относятся коэффициенты.
3) Умножить полученные доли на соответствующие им веса коэффициентов.

Численный эксперимент

I группа

$$x^{\mathrm{I},1} = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3)^T,$$
$$s_{x^{\mathrm{I},1}} = (2,3,1,2,3,3,3,2,3,1,3,2,0,2,3,3,3,1,2,3)^T.$$

$$x^{\mathrm{I},2} = (2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,4)^T,$$
$$s_{x^{\mathrm{I},2}} = (2,2,2,1,2,3,3,3,2,3,3,2,3,3,3,3,3,3,3,4)^T.$$

$$x^{\mathrm{I},3} = (2,2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,4,4)^T,$$
$$s_{x^{\mathrm{I},3}} = (1,1,2,1,3,1,0,2,3,2,1,3,2,2,2,2,2,3,3,3)^T.$$

III группа

$$x^{\mathrm{III},1} = (1,1,1,1,1,1,1,1,3,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5)^T,$$
$$s_{x^{\mathrm{III},1}} = (1,0,1,1,0,1,1,1,2,3,3,2,2,2,3,3,2,2,3,0)^T.$$

$$x^{\mathrm{III},2} = (1,1,1,1,1,1,1,2,2,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5)^T,$$
$$s_{x^{\mathrm{III},2}} = (1,1,0,1,1,0,1,1,2,2,2,4,4,3,4,5,3,1,0,2)^T.$$

$$x^{\mathrm{III},3} = (1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5)^T,$$
$$s_{x^{\mathrm{III},3}} = (1,1,1,1,1,1,1,1,3,2,2,1,4,1,2,3,2,1,1,1)^T.$$

Результаты эксперимента

	I			III		
№	1	2	3	1	2	3
F	45	53	39	33	38	31
R	45	53	39	39	39	38

После пересчёта баллов результаты студентов, которым достались варианты из I группы, не изменились. А результаты студентов, которым достались варианты из III группы, увеличились на 6, 1 и 7 баллов соответственно.

Альтернативный метод

Отличие:

- выбирается «опорная» выборка b, относительно которой рассчитываются коэффициенты для других выборок:

$$\alpha_{x_i^{\mathrm{I,j}}} = \frac{b_i}{x_i^{\mathrm{I,j}}}, \qquad \alpha_{x_i^{\mathrm{III,k}}} = \frac{b_i}{x_i^{\mathrm{III,k}}},$$

  «опорной» является выборка с наибольшим содержанием заданий сложности «1»

Достоинство:

- за задания сложности «1» не начисляется баллов больше, чем первичных

Недостатки:

- существенное отклонение от первоначальных выборок
- эталоном считается тестовый вариант, состоящий только из заданий сложности «1» и сложности «5», что ставит под сомнение эффективность такого тестирования

Результаты работы

- Подтверждена гипотеза существования неоднородности выборок заданий при большом количестве вариантов в тестировании.
- Разработан метод снижения необъективности баллов, вызванной неоднородностью выборок заданий.
- Проведён эксперимент, демонстрирующий оптимизацию процесса тестирования.