Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Дипломная работа:
Имитационное моделирование поведения цены различных финансовых инструментов с помощью стохастических процессов.

Выполнил:	студент группы 08-604 Долгий Д. Н.
Руководитель	к. ф.-м. н., доц. каф. 804 Лебедев М.В.

Москва, 2012

1. Геометрическое броуновское движение

Определение

Случайный процесс $S_t \in \mathbb{R}$ является процессом **геометрического броуновского движения (ГБД)**, если S_t удовлетворяет следующему уравнению

$$dS_t = S_t(adt + bdW_t), \;\; S_t|_{t=0} = S_0. \tag{1}$$

где $a, b, t, S_0 \in \mathbb{R}, b > 0, t \geq 0$, W_t — винеровский процесс. $S_0 > 0$ — задано, a, b — параметры модели.

Уравнение (1) имеет явное решение:

$$S_t = S_0 e^{(a-b^2/2)t+bW_t}. \tag{2}$$

Сечения S_t являются логарифмически нормальными случайными величинами с моментными характеристиками:

$$M[S_t] = S_0 e^{at},$$
$$D[S_t] = S_0^2 e^{2at}(e^{b^2 t} - 1).$$

2. Оценивание параметров геометрического броуновского движения

Пусть последовательность $s_{t_i} = s_{t_0}, s_{t_1}, \ldots, s_{t_n}$ является траекторией геометрического броуновского движения S_t, $t_i = (i-1)\Delta t$, $i = 1, \ldots, n+1$. Рассмотрим приращения:

$$\Delta \ln s_{t_i} = \ln s_{t_{i+1}} - \ln s_{t_i} = (a - b^2/2)\Delta t + b\Delta w_{t_i}, \tag{3}$$

$b\Delta w_{t_i} \sim N(0, b^2\Delta t)$. Пусть $\theta_1 = (a - b^2/2)\Delta t$, $\theta_2^2 = b^2\Delta t$. С помощью метода моментов получены следующие оценки:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta \ln s_{t_i} = \frac{1}{n}\left(\ln s_{t_n} - \ln s_{t_0}\right),$$

$$\hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\Delta \ln s_{t_i} - \hat{\theta}_1)^2.$$

Теорема

Пусть S_t — процесс ГБД, тогда оценки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2^2$ являются состоятельными.

3. Моделирование геометрического броуновского движения

Пусть $t_i = (i-1)\Delta t$, $i = 1, \ldots, n+1$, Δt — постоянный шаг моделирования.

Алгоритм

1. Задать параметры $a, b, S_0, \Delta t, n$.
2. Смоделировать гауссовские случайные величины w_i.
3. Вычислить элементы S_i по формуле

$$S_{t_i} = S_0 \exp((a - b^2/2) \cdot (i-1) \cdot \Delta t + b w_i),$$

где

$$w_1 = 0, \; w_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta w_j, \; \Delta w_j \sim N(0, \Delta t), \; i = 2, \ldots, n+1.$$

4. Фрактальное броуновское движение

Определение

Непрерывный гауссовский процесс $W^{(H)} = \left(W_t^{(H)}\right)_{t \geq 0}$ с нулевым средним и ковариационной функцией

$$cov\left(W_t^{(H)}, W_s^{(H)}\right) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

называется **стандартным фрактальным броуновским движением (ФБД)** с показателем самоподобия Харста $0 < H < 1$.

Замечание

Винеровский процесс является частным случаем ФБД при $H = \frac{1}{2}$.

5. Моделирование фрактального броуновского движения

Алгоритм

1. Задать параметры H — параметр Харста, $n+1$ — количество сечений и Δt — величину постоянного шага моделируемого процесса.
2. Вычислить ковариационную матрицу K, определяемую выражением (4).
3. Найти разложение Холецкого A матрицы K, A - нижняя треугольная матрица.
4. Смоделировать вектор v, $v \sim N(0, I)$, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
5. Составить вектор $w^{(H)} = (0, (Av)^T)^T$, которое и будет искомой траекторией процесса ФБД.

$$K_{i,j} = \frac{1}{2}(\Delta t)^{2H}(|i|^{2H} + |j|^{2H} - |i-j|^{2H}), \ i, j = 2, \ldots, n+1 \qquad (4)$$

6. Смешанное геометрическое броуновское движение

Определение

Случайный процесс $S_t \in \mathbb{R}$ *является процессом* **смешанного геометрического броуновского движения (СГБД)**, *если* S_t *удовлетворяет следующему уравнению*

$$S_t = S_0 \exp(at + bW_t + cW_t^{(H)}),$$

где $a, b, c, t \in \mathbb{R},\ b, c \geq 0,\ b^2 + c^2 \neq 0,\ t \geq 0, H > \frac{1}{2}$.

Здесь S_0 – задано, a, b, c – параметры модели, W_t – винеровский процесс, $W_t^{(H)}$ – фрактальное броуновское движение.

Рассматривается модель при $b = 0$:

$$S_t = S_0 \exp(at + cW_t^{(H)}).$$

7. Эвристическое оценивание параметров смешанного геометрического броуновского движения

Пусть задана траектория $s_{t_i} = s_{t_0}, s_{t_1}, \dots, s_{t_n}$ процесса СГБД S_t, $t_i = (i-1)\Delta$, $i = 1, \dots, n+1$:

$$\Delta \ln s_{t_i} = \ln s_{t_{i+1}} - \ln s_{t_i} = a\Delta t + c\Delta W_{t_i}^{(H)}.$$

1. Параметры $a\Delta t$, $c(\Delta t)^H$ оценим с помощью метода моментов.
2. Параметр Харста H оценим методом абсолютных значений: зададим числа $k, m \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$X^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m}^{km} \Delta \ln s_{t_i}, \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta \ln s_{t_i}.$$

где $\left[\frac{n}{m}\right]$ – целая часть $\frac{n}{m}$, $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{m}\right]$. Введем статистику

$$M^{(m)} = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{[n/m]} |X^{(m)}(k) - \overline{X}_n|.$$

Статистика $M^{(m)} \sim m^{H-1}$ при больших m.

8. Моделирование смешанного геометрического броуновского движения

Пусть $t_i = (i-1)\Delta t$, $i = 1, \ldots, n+1$, Δt — постоянный шаг моделирования.

Алгоритм

1. Задать параметры $a,\ c,\ S_0,\ \Delta t,\ n+1,\ H$.
2. Смоделировать фрактальное броуновское движение $w^{(H)}$ с параметрами $n+1,\ H,\ \Delta t$.
3. Вычислить элементы S_i по формуле:

$$S_{t_i} = S_0 \exp(a \cdot (i-1) \cdot \Delta t + b w_i^{(H)}),$$

9.1. Имитационное моделирование индекса RTSI

Значения процессов

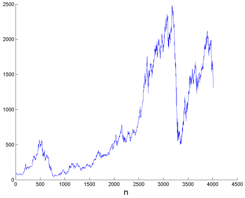

Рис. 1. RTSI

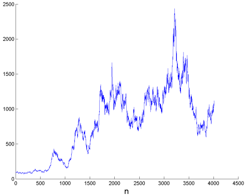

Рис. 2. ГБД

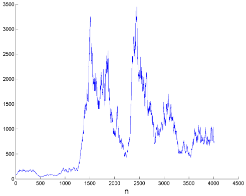

Рис. 3. СГБД

9.2. Имитационное моделирование индекса RTSI (продолжение)

Логарифм относительного изменения

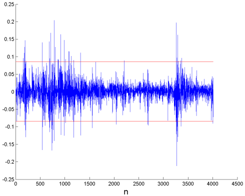

Рис. 4. RTSI

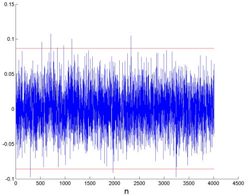

Рис. 5. ГБД

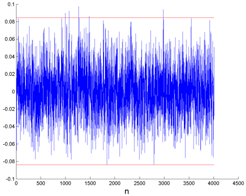

Рис. 6. СГБД

Гистограмма логарифма относительного изменения

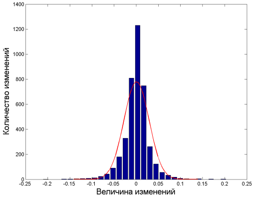

Рис. 7. RTSI

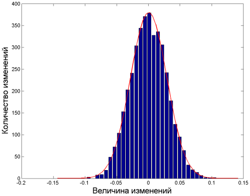

Рис. 8. ГБД

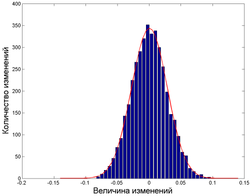

Рис. 9. СГБД

9.4. Имитационное моделирование индекса RTSI (продолжение)

Гистограмма количества и величины изменений в стандартных отклонениях для индекса RTSI и смоделированных процессов

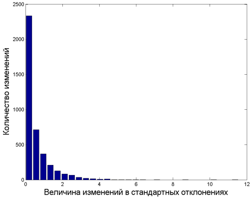

Рис. 10. RTSI

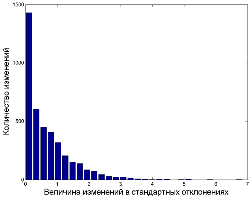

Рис. 11. ГБД

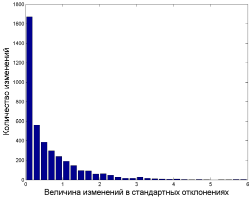

Рис. 12. СГБД

10. Заключение:

1. Выбраны 2 модели ценообразования, рассмотрены их свойства. Получены оценки параметров для этих моделей, доказана теорема о состоятельности оценок параметров геометрического броуновского движения.
2. Проведено моделирование случайных процессов, задаваемых выбранными моделями.
3. Выполнено имитационное моделирование различных финансовых инструментов. Проведен анализ результатов на примере индекса RTSI.
4. Разработана программа для вычисления оценок и сравнения смоделированных данных с реальными.

СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ!