Автоматика и телемеханика, № 12, 2020

Тематический выпуск[1]

© 2020 г. **В.М. АЗАНОВ, канд. физ.-мат. наук (azanov59@gmail.com)**
(Московский авиационный институт)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ И НЕФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ[2]

Рассматривается задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности первого достижения границ заданной области. Формулируются и доказываются достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. С помощью поверхностей уровней 1 и 0 функции Беллмана находятся двусторонние оценки функции правой части уравнения метода динамического программирования, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия, и предлагается способ построения субоптимального управления. Формулируются условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. Рассматривается пример.

Ключевые слова: дискретные системы, стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, метод динамического программирования, функция Беллмана.

DOI: 10.31857/S0005231020120016

1. Введение

Одним из важнейших направлений исследований в области стохастического оптимального управления являются задачи с нефиксированным моментом остановки. Среди них отдельно выделяют задачу стохастического быстродействия [1, 2], задачу с бесконечным горизонтом управления [3–6], задачу оптимизации времени пребывания системы в заданной трубке траекторий [1, 7] и задачу оптимизации момента первого достижения границ заднной области [1, 8, 9]. Модели управления с нефиксированным моментом остановки имеют широкое применение в авиационной [10], экономической [11], биологической, робототехнической и энергетической [1] областях. В случае систем с непрерывным временем известность получили методы, основанные на достаточных условиях оптимальности в форме метода динамического программирования, позволяющие искать оптимальные стратегии в классе позиционных. Интересно, что использование именно вероятностного критерия [1, 7]

[1] Статьи данной рубрики являются окончанием тематического выпуска, посвященного В.С. Пугачеву (№ 11, 2020).

[2] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00595).

приводит к конструктивной форме постановки задач управления с нефиксированным временем, для которой удается записать уравнение Беллмана. Тем не менее до сих пор существует ряд принципиальных проблем численного поиска оптимального управления, а аналитические решения получены лишь для ряда модельных задач [1]. Это обстоятельство связано со следующими трудностями: решение уравнения Беллмана может быть не единственным; даже если решение уравнения Беллмана существует в классе гладких функций, оно может быть недопустимым (например, потому что при нем может не существовать сильного решения уравнения стохастической системы в форме Ито); в классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается точная грань критерия; уравнение Беллмана связано с так называемым "проклятьем размерности".

В случае дискретного времени качественная теория подобных задач изложена в [3]. Известны решения отдельных задач экономики [11] и модельных примеров [9]. В [9] была рассмотрена задача оптимизации вероятности первого достижения окрестности нуля траекториями линейной стохастической системы в канонической форме управляемости Бруновского. С помощью ее сведения к задаче с вероятностным терминальным критерием и дальнейшим использованием метода динамического программирования в форме [12] было найдено ее аналитическое решение.

В настоящей статье исследуется задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности первого достижения ее траекториями заданной трубки. Исследуются достаточные условия оптимальности, схожие с [12], и свойства двусторонних границ функции Беллмана [13, 14]. Находятся условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием [12]. В качестве примера рассматривается задача управления портфелем ценных бумаг.

2. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую систему с дискретным временем

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ – вектор управления, U_k – множество ограничений на управление, ξ_k – вектор случайных возмущений со значениями на $\mathbb{R}^s$ и известным распределением $\mathbf{P}_{\xi_k}$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ – функция перехода (функция системы), $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ — горизонт управления.

В отношении системы (1) введем *предположения:*

1. Известна полная информация о векторе состояния x_k (данный факт позволяет строить управление в классе функций $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, где $\gamma_k\left(\cdot\right)$ — некоторая измеримая функция). В данном случае говорят, что "управление ищется в классе полной обратной связи по состоянию";

2. Начальное состояние $x_0 = X$ является детерминированным вектором из $\mathbb{R}^n$;

3. Функция системы $f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)$ непрерывна для всех k;

4. Вектор управления u_k формируется следующим образом: $u_k = \gamma_k(x_k)$, где $\gamma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – измеримая функция с ограниченными значениями $u_k \in U_k$, причем U_k — компактное множество;

5. Вектор состояния x_{k+1} формируется следующим образом: на шаге k реализуется вектор x_k, далее формируется вектор управления $u_k = \gamma_k(x_k)$ и в последнюю очередь реализуется случайное возмущение ξ_k;

6. Управлением называется набор функций $u(\cdot) = (\gamma_0(\cdot), \ldots, \gamma_N(\cdot)) \in \mathcal{U}$, классом допустимых управлений называется множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \ldots \times \mathcal{U}_N$, где $\mathcal{U}_k$ — множество борелевских функций $\gamma_k(\cdot)$ с ограниченными на U_k значениями;

7. Случайный вектор ξ_k является непрерывным с значениями в $\mathbb{R}^s$ и известным распределением $\mathbf{P}_{\xi_k}$, причем компоненты вектора $\zeta = (X, \xi_0, \ldots, \xi_N)$ независимы.

Заметим, что система (1) является марковской, т.е. ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием.

На траекториях системы (1) определим функционал вероятности

$$P(u(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \{x_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\}\right),$$

множества $\mathcal{F}_k$ имеют вид

$$\begin{cases} \mathcal{F}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \Phi_k(x) \leqslant \varphi\}, \quad k = \overline{1, N+1}, \\ \mathcal{F}_0 = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — известный скаляр, $\Phi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, $k = 1, \ldots, N+1$, причем $\Phi_{N+1}(x)$ ограничена снизу.

Рассматривается задача

$$P(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}, \tag{2}$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \ldots \times \mathcal{U}_N$.

Физически задача (2) заключается в поиске управления, максимизирующего вероятность первого достижения трубки траекторий, заданной в виде последовательности множеств $\{\mathcal{F}_{k+1}\}_{k=0}^{N}$.

Отметим, что метод динамического программирования в форме [12], сформулированный для задач оптимального управления с вероятностным терминальным критерием, неприменим в общем случае к задаче (2). В разделе 3 устанавливаются достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования, схожие с [12].

3. Метод динамического программирования и двусторонние оценки функции Беллмана

Определим функцию Беллмана $\mathsf{B}_k : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ в задаче (2) как

$$\mathsf{B}_k(x) = \sup_{\gamma_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k, \ldots, \gamma_N(\cdot) \in \mathcal{U}_N} \mathbf{P}\left(\min_{i=\overline{k,N}} \Phi_{i+1}(x_{i+1}) \leqslant \varphi \middle| x_k = x\right).$$

Принимая во внимание сделанные в разделе 2 предположения, сформулируем теорему об уравнении Беллмана для задачи (2) в пространстве состояний размерности n.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) *функции $f_k(x_k, u_k, \xi_k)$ непрерывны для всех $k = \overline{0, N}$;*
2) *функции $\Phi_k(x_k)$ непрерывны для всех $k = \overline{1, N+1}$;*
3) *функция $\Phi_{N+1}(x_{N+1})$ ограничена снизу;*
4) *случайные векторы $X, \xi_0, \ldots, \xi_N$ независимы;*
5) *множества $U_0, \ldots, U_N$ компактны.*

Тогда оптимальное управление в задаче (2) существует в классе измеримых функций $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ и определяется в результате решения следующих задач:

$$\gamma_k^*(x) = \arg\max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + (1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x))\, \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k))\right], \tag{3}$$

$$\mathsf{B}_k(x) = \max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + (1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x))\, \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k))\right], \quad k = \overline{0, N}, \tag{4}$$

$$\mathsf{B}_{N+1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_{N+1}}(x). \tag{5}$$

Доказательства теоремы 1, всех последующих теорем, утверждений и леммы приведены в Приложении.

В теореме 1 $\mathbf{M}_{\xi_k}[\cdot]$ — оператор математического ожидания по распределению $\mathbf{P}_{\xi_k}$ случайного вектора ξ_k, а $\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)$ — индикаторная функция множества $\mathcal{F}_k$. Заметим, что соотношения (3)–(5) отличаются от классического уравнения Беллмана [12] в задаче с вероятностным терминальным критерием наличием в правой части дополнительного слагаемого $\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)$ и множителя $1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)$ под оператором математического ожидания.

Как известно, прямое интегрирование уравнения Беллмана связано с трудностями вычислений кратных интегралов и решения задач стохастического программирования в его правой части. Указанные трудности неоднократно проявлялись даже для систем простейшего вида, например для системы управления портфелем ценных бумаг [15–17] и для системы управления стационарным спутником [12]. Вследствие этого на протяжении почти двадцати лет задачи оптимального управления с вероятностным критерием рассматривались в одношаговой $N = 0$ и двухшаговой $N = 1$ постановках [15–17]. В [13, 14] с использованием поверхностей уровня 1 и 0 были найдены двусторонние границы функции Беллмана, что позволило получить решение отдельных задач оптимального управления с вероятностным критерием для произвольного шага по времени N.

По аналогии с [13, 14] исследуем свойства функции Беллмана для задачи (2) с помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана.

4. Двусторонние границы функции Беллмана

Введем в рассмотрение поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана

$$\mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k(x) = 1\}, \quad \mathcal{O}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k(x) = 0\}$$

и множество $\mathcal{B}_k = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k\}$. Для удобства введем обозначение $\overline{\mathcal{F}}_k = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}_k$. Нетрудно видеть, что из определения введенных множеств выполнено, что

$$\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k = \mathbb{R}^n, \qquad \begin{cases} \mathsf{B}_k(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k, \\ \mathsf{B}_k(x) \in (0,1), & x \in \mathcal{B}_k, \\ \mathsf{B}_k(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

Теорема 2. *Справделивы утверждения*:

1. *Множества* $\mathcal{I}_k$, $k = \overline{0,N}$, *удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени*

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists u \in U_k : \ \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) = 1\}, \quad k = \overline{0,N},$$
$$\mathcal{I}_{N+1} = \mathcal{F}_{N+1};$$

2. *Множества* $\mathcal{O}_k$, $k = \overline{0,N}$, *удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени*

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ \forall u \in U_k : \ \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right) = 1\}, \quad k = \overline{0,N},$$
$$\mathcal{O}_{N+1} = \overline{\mathcal{F}}_{N+1};$$

3. *Для* $x \in \mathcal{I}_k$ *функция* $\gamma_k^*(x)$ *принимает любое значение из множества* $U_k^{\mathcal{I}}(x)$

(6) $$U_k^{\mathcal{I}}(x) = \{u \in U_k : \ \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) = 1\};$$

4. *Для* $x \in \mathcal{O}_k$ *функция* $\gamma_k^*(x)$ *принимает любое значение из множества* U_k;

5. *Уравнение Беллмана в области* $x \in \mathcal{B}_k$ *допускает представление*

(7) $$\mathsf{B}_k(x) = \max_{u \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) + \\ + \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\right) \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right) \,\Big|\, f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\right] \Big\};$$

6. *Для* $x \in \mathcal{B}_k$ *и* $u \in U_k$ *справедлива система неравенств*

(8) $$\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{F}_{k+1}\right) \leqslant \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right] \leqslant 1 - \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right);$$

7. *Для* $x \in \mathcal{B}_k$ *функция Беллмана удовлетворяет двустороннему неравенству*

(9) $$\Psi_k(x) \leqslant \underline{\mathsf{B}}_k(x) \leqslant \mathsf{B}_k(x) \leqslant \overline{\mathsf{B}}_k(x),$$

где

(10) $$\Psi_k(x) = \sup_{u \in U_k} \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{F}_{k+1}\right),$$

$\underline{\mathsf{B}}_k(x)$ — *нижняя, а* $\overline{\mathsf{B}}_k(x)$ — *верхняя оценки функции Беллмана*

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \sup_{u \in U_k} \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right),$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k(x) = \sup_{u \in U_k} \left\{1 - \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}\right)\right\},$$

причем $\underline{\mathsf{B}}_N(x) = \mathsf{B}_N(x) = \overline{\mathsf{B}}_N(x)$.

Отличием правой части соотношений п. 1 теоремы 2 от соотношений для поверхности уровня 1 функции Беллмана в задаче с терминальным вероятностным критерием [18] является наличие операции объединения с множеством $\mathcal{F}_k$. Для поверхности уровня 0 функции Беллмана отличие заключается в наличии операции пересечения с множеством $\overline{\mathcal{F}}_k$. Пункты 3 и 4 устанавливают простейшие (относительно (3)) выражения для определения оптимального управления при $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$, которые с точностью до конструкций множеств $\mathcal{I}_k$ совпадают с аналогичными в задаче с терминальным вероятностным критерием. Пункты 6 и 7 теоремы 2 устанавливают двусторонние оценки функции правой части уравнения динамического программирования и функции Беллмана соответственно. При этом выражения для нижних и верхних границ с точностью до конструкций множеств $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{O}_k$ совпадают с аналогичными в задаче с терминальным критерием [13, 18]. Отличием же является наличие дополнительного неравенства в левой части (8) и, как следствие, неравенства $\Psi_k(x) \leqslant \underline{\mathsf{B}}_k(x)$.

Исследуем детально свойства стратегии, максимизирующей на каждом шаге нижнюю границу функции правой части уравнения динамического программирования.

5. Субоптимальная стратегия

Определим стратегию $\underline{u}(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot), \ldots, \underline{\gamma}_N(\cdot)\right)$, где

$$\underline{\gamma}_k(x) = \arg\max_{u \in U_k} \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right), \quad k = \overline{0, N}. \tag{11}$$

Данная стратегия обладает следующими *свойствами*:

- *При* $x \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$ *для всех* $k = \overline{0, N}$ *выполнено равенство* $\underline{\gamma}_k(x) = \gamma_k^*(x)$;
- *Для* $k = N$ *выполнено равенство* $\underline{\gamma}_k(x) = \gamma_k^*(x)$;
- *Из* $\mathcal{F}_k = \mathcal{I}_k$ *для всех* $k = \overline{0, N}$ *следует* $\underline{\gamma}_k(x) = \gamma_k^*(x)$.

Теорема 3. *Пусть стратегия* $\underline{u}(\cdot)$ *существует в классе* $\mathcal{U}$. *Тогда справедливы утверждения*:

1. *Значение вероятностного критерия на стратегии* $\underline{u}(\cdot)$ *имеет вид*

$$\begin{aligned} P(\underline{u}(\cdot)) = \underline{F}(\varphi, N, X) + \\ + \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{l} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\underline{x}_k$ — *траектория системы, замкнутой управлением* (11)

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = f_k\left(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \xi_k\right), \\ \underline{x}_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $\underline{u}_k = \underline{\gamma}_k\left(\underline{x}_k\right)$;

2. *Оптимальное значение вероятностного критерия имеет вид*

$$\begin{aligned} &P\left(u^*(\cdot)\right) = \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) + \\ &+ \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l}\left\{x_{k+1}^* \in \mathcal{I}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{l}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) + \\ &+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{x_{k+1}^* \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где x_k^* — *траектория системы, замкнутой оптимальным управлением*

$$\begin{cases} x_{k+1}^* = f_k\left(x_k^*, u_k^*, \xi_k\right), \\ x_0^* = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $u_k^* = \gamma_k^*\left(x_k^*\right)$;

3. *Для любых* $\varphi \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{R}^n$ *справедлива система неравенств*

$$F^{\mathcal{F}}\left(\varphi, N, X\right) \leqslant \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) \leqslant P\left(\underline{u}(\cdot)\right) \leqslant P\left(u^*(\cdot)\right) \leqslant \overline{F}\left(\varphi, N, X\right), \tag{14}$$

где функции

$$F^{\mathcal{F}} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to [0,1], \quad \underline{F} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to [0,1], \quad \overline{F} \colon \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to [0,1]$$

имеют вид

$$F^{\mathcal{F}}\left(\varphi, N, X\right) = \Psi_0\left(X\right), \quad \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) = \underline{\mathsf{B}}_0\left(X\right), \quad \overline{F}\left(\varphi, N, X\right) = \overline{\mathsf{B}}_0\left(X\right).$$

Из теоремы 3 можно получить оценку качества субоптимальной стратегии (11) $\underline{u}(\cdot)$

$$P\left(u^*(\cdot)\right) - P\left(\underline{u}(\cdot)\right) \leqslant \Delta\left(\varphi, N, X\right),$$

справедливую для всех

$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad N \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $\Delta : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to [0,1]$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\Delta\left(\varphi, N, X\right) = \overline{F}\left(\varphi, N, X\right) - \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) - \\ &- \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{l}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) - \\ &- \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Исследуем условия эквивалентности задачи (2) и задачи оптимального управления с вероятностным терминальным критерием.

6. Условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием

Рассмотрим вероятностный терминальный критерий на траекториях системы (1)

$$P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right)=\mathbf{P}\left(x_{N+1}\in\mathcal{F}_{N+1}\right)=\mathbf{P}\left(\Phi_{N+1}\left(x_{N+1}\right)\leqslant\varphi\right) \tag{16}$$

и задачу оптимального управления

$$P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right)\to\max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}. \tag{17}$$

Согласно [12] решение задачи (17) существует в классе $\mathcal{U}$ и определяется в результате решения уравнений динамического программирования

$$\gamma_k^{\varphi}\left(x\right)=\arg\max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right], \tag{18}$$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)=\max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right],\quad k=\overline{0,N}, \tag{19}$$

$$\mathsf{B}_{N+1}^{\varphi}\left(x\right)=\mathbf{I}_{\mathcal{F}_{N+1}}\left(x\right), \tag{20}$$

где $\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)$ – функция Беллмана в задаче (17).

Сформулируем утверждение об эквивалентности задач (2) и (17).

Л е м м а. *Пусть для всех* $k=\overline{0,N}$ *выполнено* $\mathcal{F}_k\subseteq\Delta\mathcal{I}_k$, *где*

$$\Delta\mathcal{I}_k=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ \exists u\in U_k:\ \mathbf{P}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)=1\right\}. \tag{21}$$

Тогда задача (3) *эквивалентна задаче оптимального управления с вероятностным терминальным критерием* (17) *в смысле равенства оптимальных стратегий* $u^*\left(\cdot\right)=u^{\varphi}\left(\cdot\right)$, *оптимальных значений критериев* $P\left(u^*\left(\cdot\right)\right)=P_{\varphi}\left(u^{\varphi}\left(\cdot\right)\right)$ *и равенства для всех* $k=\overline{0,N+1}$ *и* $x\in\mathbb{R}^n$ *функций Беллмана* $\mathsf{B}_k\left(x\right)=\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)$.

Отметим, что из леммы для узкого класса систем можно получить более конкретные условия эквивалентности задач (2) и (17), однако это не является целью данной статьи.

Применим полученные результаты для исследования дополнительных свойств задачи оптимального управления портфелем ценных бумаг с вероятностным критерием.

7. Управление портфелем ценных бумаг с нефиксированным временем окончания

Рассмотрим дискретную стохастическую систему управления вида [13, 19]

$$\begin{cases}x_{k+1}=x_k\left(1+bu_k^1+\displaystyle\sum_{j=2}^{m}u_k^j\xi_k^{j-1}\right), & k=\overline{0,N},\\ x_0=X,\end{cases} \tag{22}$$

где $n=1$, m и $s=m-1$ — размерности векторов состояния, управления и случайных возмущений соответственно, $X>0$, $b>-1$, $\varphi<0$ — детерминированные скаляры, $\xi_k=\left(\xi_k^1,\ldots,\xi_k^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$ — случайные векторы с независимыми компонентами, причем ξ_{k+1} и ξ_k являются независимыми для всех $k=\overline{0,N-1}$. Пусть ограничения на управления заданы в виде

$$U_k=U=\left\{u\in\mathbb{R}^m:\ \sum_{j=1}^m u^j=1,\ u^j\geqslant 0,\ \forall j=\overline{1,m}\right\},\quad k=\overline{0,N}.$$

Предположим, что носитель распределения случайных векторов ξ_k имеет вид $\mathrm{supp}\rho_\xi\left(t\right)=\bigotimes\limits_{j=1}^{m-1}\left[\underline{\varepsilon}_j,\overline{\varepsilon}_j\right]$, причем $\forall j=\overline{1,m-1}$ выполнено $-1\leqslant\underline{\varepsilon}_j\leqslant b\leqslant\overline{\varepsilon}_j$.

Рассмотрим задачу оптимального управления с нефиксированным временем

$$\mathbf{P}\left(\min_{k=\overline{0,N}}\left\{-x_{k+1}\right\}\leqslant\varphi\right)\to\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}\tag{23}$$

и задачу с вероятностным терминальным критерием

$$\mathbf{P}\left(-x_{N+1}\leqslant\varphi\right)\to\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}.\tag{24}$$

В обозначениях, введенных в статье, имеем:

$$\mathcal{F}_k=\mathcal{F}=\left[-\varphi,+\infty\right),\quad \Phi_k\left(x\right)=-x,\quad f_k\left(x,u,\xi\right)=x\left(1+bu^1+\sum_{j=2}^m u^j\xi^{j-1}\right).$$

Если за X принять размер стартового капитала, за x_k – размер капитала на начало k-го года, за u_k^1 – долю x_k капитала, вкладываемого в безрисковый актив (например, в надежный банк), имеющий доходность b, u_k^j – доли капитала, вкладываемые в рисковые активы, характеризующиеся доходностями ξ_k^{j-1}, $j=\overline{2,m}$, то задача (23) заключается в максимизации вероятности достижения размера капитала уровня $(-\varphi)$ за время, ограниченное сверху величиной $N+1$, а задача (24) — за время $N+1$ путем инвестиций в некоторые активы.

Задача (24) рассматривалась в двухшаговой постановке $N=1$ для случая одного рискового актива $m=2$ в [15, 16]. В [13] был найден целый класс асимптотически оптимальных (при $N\to\infty$) стратегий. Задача (23) рассматривается впервые.

Воспользуемся результатами настоящей статьи и проверим условия эквивалентности задач (23) и (24).

Утверждение 1. Для всех $k=\overline{0,N}$ выполнены равенства

$$\mathcal{I}_k=\Delta\mathcal{I}_k=\left[\varphi_k^{\mathcal{I}},+\infty\right),\quad \mathcal{B}_k=\left(\varphi_k^{\mathcal{O}},\varphi_k^{\mathcal{I}}\right),\quad \mathcal{O}_k=\left(-\infty,\varphi_k^{\mathcal{O}}\right],$$

где скаляры $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, $\varphi_k^{\mathcal{O}}$ определяются выражениями

$$\varphi_k^{\mathcal{I}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{b,\ \max_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)^{k-N-1},$$

$$\varphi_k^{\mathcal{O}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{b,\ \max_{j=\overline{1,m-1}} \overline{\varepsilon}_j\right\}\right)^{k-N-1}.$$

Из утверждения 1 вытекает, что условие леммы выполняется $\mathcal{F} \subseteq \Delta\mathcal{I}_k$ и, следовательно, задачи (23) и (24) являются эквивалентными. Из утверждения 1 следует, что управление, оптимальное по вероятностному терминальному критерию, максимизирует вероятность первого достижения капиталом x_k уровня $(-\varphi)$ за время, ограниченное сверху величиной N.

Воспользуемся двусторонними границами функции оптимального значения вероятностного критерия для определения оценки такого момента времени $N^* \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\in\{0,\ldots,N^*\}} x_k^* \geqslant \varphi\right) = 1,$$

где $\{x_k^*\}_{k=0}^N$ – траектории системы (22), замкнутой оптимальным управлением $u^*(\cdot)$. Интересно, что двусторонние границы функции оптимального значения вероятностного критерия (см. теорему 3) позволяют найти такую оценку без нахождения оптимального управления.

Утверждение 2. *Пусть $\{\underline{x}_k\}_{k=0}^N$ — траектории системы (22), замкнутой управлением (11), где*

$$\underline{\gamma}_k(x) = \arg\max_{u\in U} \mathbf{P}\left(x\left(1 + bu^1 + \sum_{j=2}^m u^j \xi_k^{j-1}\right) \geqslant \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right), \quad k = \overline{0, N}. \tag{25}$$

Тогда существует $\underline{N} \in \mathbb{N}$, такой что

$$\mathbf{P}\left(\max_{k=\{0,\ldots,\underline{N}\}} \underline{x}_{k+1} \geqslant \varphi\right) = 1,$$

причем для любых $X > 0$, $b > -1$ выполнено $N^* \geqslant \underline{N}$ и

$$\underline{N} = \left[\frac{\ln(-\varphi) - \ln(X)}{\ln\left(1 + \max\left\{b,\ \max_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)} - 1\right]. \tag{26}$$

Проведем серию численных экспериментов для проверки адекватности оценки (26). При этом будем рассматривать случай одного рискового актива, для которого в [13] была найдена стратегия (25)

$$\underline{\gamma}_k(x) = \begin{cases} (1,0)^{\mathrm{T}}, & x \geqslant -\varphi(1+b)^{k-N-1}, \\ (0,1)^{\mathrm{T}}, & x < -\varphi(1+b)^{k-N-1}. \end{cases}$$

Значения параметров системы заданы в табл. 1.

Таблица 1. Значения параметров системы

Номер эксперимента	N	φ	X	b	$\underline{\varepsilon}_1$	$\overline{\varepsilon}_1$
а	200	100	15	0,01	–1	0,02
б	200	100	20	0,01	–1	0,02
в	200	100	25	0,01	–1	0,02

Таблица 2. Значения параметров системы

Номер эксперимента	а	б	в
$\underline{N}$	189	160	138
N^*	189	160	139

Для моделирования уровня N^* будем использовать метод Монте-Карло из 50000 наблюдений. Результаты моделирования занесены в табл. 2. Из табл. 2 видно, что $\underline{N}$ является относительно точной оценкой числа N^*.

8. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности первого достижения траекториями системы заданной трубки траекторий. Получены достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. Найдены двусторонние оценки функции правой части уравнения метода динамического программирования, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. Получены аналитические выражения для приближенного определения оптимального управления и найдены оценки точности такого управления. Доказаны условия эквивалентности данной задачи и задачи оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. Данные условия были проверены на задаче оптимального управления портфелем ценных бумаг.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение функцию $\Phi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такую что $\Phi_0(x) = \Phi_1(x)$. Расширим вектор состояния системы путем введения новой переменной $y_k = \min_{i=\overline{0,k}} \Phi_i(x_i)$. Расширенная система управления имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, \widetilde{u}_k, \xi_k), \\ y_{k+1} = \min\{y_k,\ \Phi_k(x_k)\}, \\ x_0 = X, \\ y_0 = \Phi_0(X), \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $\widetilde{u}_k = \widetilde{\gamma}_k(x_k, y_k)$. Введем в рассмотрение функцию правой части расширенной системы $\widetilde{f} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\widetilde{f}_k(x, y, u, \xi) = (f_k(x, u, \xi), \min\{y,\ \Phi_k(x)\})^{\mathrm{T}}.$$

Тогда эквивалентную задачу оптимального управления можно представить в виде

$$\mathbf{P}\left(\min\left\{y_{N+1},\ \Phi_{N+1}\left(x_{N+1}\right)\right\} \leqslant \varphi\right) \to \sup_{u(\cdot)\in\widetilde{\mathcal{U}}}, \quad k=\overline{0,N},$$

где $\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}}_0 \times \ldots \times \widetilde{\mathcal{U}}_N$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_k = \left\{\widetilde{\gamma} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m \mid \widetilde{\gamma} \text{ измерима по Борелю, } \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \widetilde{\gamma}\left(x\right) \in U_k\right\}.$$

Эквивалентность выше понимается в смысле равенства критериев

$$P\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\min_{k=\overline{0,N}} \Phi_{k+1}\left(x\right) \leqslant \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\min\left\{y_{N+1},\ \Phi_{N+1}\left(x_{N+1}\right)\right\} \leqslant \varphi\right).$$

Уравнение Беллмана для эквивалентной задачи имеет вид [12]:

$$\widetilde{\gamma}_k^*\left(x,y\right) = \arg\max_{u\in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\widetilde{\mathsf{B}}_{k+1}\left(\widetilde{f}_k\left(x,y,u,\xi_k\right)\right)\right], \tag{П.1}$$

$$\widetilde{\mathsf{B}}_k\left(x,y\right) = \max_{u\in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\widetilde{\mathsf{B}}_{k+1}\left(\widetilde{f}_k\left(x,y,u_k,\xi_k\right)\right)\right], \tag{П.2}$$

$$\widetilde{\mathsf{B}}_{N+1}\left(x,y\right) = \mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_{N+1}(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right), \quad k=\overline{0,N}. \tag{П.3}$$

Согласно [12] если выполнены условия:

1) функции $\widetilde{f}_k$ непрерывны для всех $k=\overline{0,N}$;
2) функция $\min\left\{y,\ \Phi_{N+1}\left(x\right)\right\}$ непрерывна и ограничена снизу;
3) случайные векторы $X, \xi_0, \ldots, \xi_N$ независимы;
4) множества $U_0, \ldots, U_N$ компактны,

то оптимальное управление существует в классе измеримых функций и определяется в результате решения задач (П.1)–(П.3).

На шаге $k=N$ уравнение Беллмана можно записать в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{B}}_N\left(x,y\right) &= \max_{u\in U_N} \mathbf{M}_{\xi_N}\left[\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x),\ \Phi_{N+1}(f(x,u,\xi_k))\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right] = \\ &= \max_{u\in U_N} \mathbf{M}_{\xi_N}\Big[\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right) + \left(1-\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right) \times \\ &\qquad \times \mathbf{I}_{\{\Phi_{N+1}(f(x,u,\xi_k))\leqslant\varphi\}}\left(x\right)\Big] = \\ &= \max_{u\in U_N} \mathbf{M}_{\xi_N}\Big[\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right) + \left(1-\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right) \times \\ &\qquad \times \mathsf{B}_{N+1}\left(f_N\left(x,u,\xi_N\right)\right)\Big].\end{aligned} \tag{П.4}$$

Отсюда легко показать, что для любого $k=\overline{0,N}$ уравнение (П.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{B}}_k\left(x,y\right) = \max_{u\in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\Big[&\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_k(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right) + \\ &+ \left(1-\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_k(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right)\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\Big],\end{aligned} \tag{П.5}$$

поэтому для функции Беллмана в эквивалентной задаче справедливо представление

$$
(\text{П.6})\quad \widetilde{\mathsf{B}}_k(x,y)=\begin{cases}1, & y\leqslant\varphi,\\ \max\limits_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\Big\{\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)+(1-\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x))\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\Big\}, & y>\varphi.\end{cases}
$$

Отсюда получаем представление и для оптимального управления

$$
(\text{П.7})\quad \widetilde{\gamma}^*_k(x,y)=\begin{cases}\text{любой элемент из } U_k, & y\leqslant\varphi,\\ \arg\max\limits_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\Big\{\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)+(1-\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x))\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\Big\}, & y>\varphi.\end{cases}
$$

Условия 1–5 теоремы 1 получаются из условий существования оптимального управления для задачи с терминальным критерием. Причем пункты 2 и 3 следуют из условий непрерывности и ограниченности снизу функции $\min\{y,\ \Phi_{N+1}(x)\}$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. 1. Рассмотрим уравнение Беллмана на некотором шаге k. Для поверхности уровня 1 справедливо соотношение

$$
\mathcal{I}_k=\left\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)+(1-\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x))\,\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\right]=1\right\}=
$$
$$
=\mathcal{F}_k\cup\left\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\right]=1\right\}.
$$

Используя формулу полного математического ожидания, получаем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_k=\mathcal{F}_k\cup\Bigg\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \max_{u\in U_k}\Big\{&\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1})\times\\
&\times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\ \big|\ f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right]+\\
&+(1-\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}))\times\\
&\times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\ \big|\ f_k(x,u,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right]\Big\}=1\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Из равенств

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\ \big|\ f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right]=1,\\
&\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\ \big|\ f_k(x,u,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right]<1,
\end{aligned}
$$

следует, что

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_k=\mathcal{F}_k\cup\Bigg\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \max_{u\in U_k}\Big\{&\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1})+\\
&+(1-\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}))\times\\
&\times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))\ \big|\ f_k(x,u,\xi_k)\notin\mathcal{I}_{k+1}\right]\Big\}=1\Bigg\}=\\
&=\mathcal{F}_k\cup\left\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \max_{u\in U_k}\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1})=1\right\}.
\end{aligned}
$$

Утверждение 1 доказано.

2. Аналогично п. 1 получаем соотношение для поверхности уровня 0 функции Беллмана:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{O}_k=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)+\left(1-\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\right)\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\right]=0\right\}= \\
=\overline{\mathcal{F}}_k\cap\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\right]=1\right\}.
\end{gathered}
$$

Выполним преобразование правой части последнего выражения с использованием формулы полного математического ожидания:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_k=\overline{\mathcal{F}}_k\cap\Bigg\{x\in\mathbb{R}^n \mid \max_{u\in U_k}\Big\{&\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)\times \\
&\times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\,\big|\,f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right]+ \\
&+\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{B}_{k+1}\right)\times \\
&\times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\,\big|\,f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{B}_{k+1}\right]+ \\
&+\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{O}_{k+1}\right)\times \\
&\times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\,\big|\,f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{O}_{k+1}\right]\Big\}=0\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Из равенств

$$
\begin{gathered}
\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\,\big|\,f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right]=1, \\
\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\,\big|\,f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{B}_{k+1}\right]\in(0,1), \\
\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\,\big|\,f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{O}_{k+1}\right]=0
\end{gathered}
$$

получаем, что

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_k=\overline{\mathcal{F}}_k\cap\Bigg\{x\in\mathbb{R}^n \mid \max_{u\in U_k}\Big\{&\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)+ \\
&+\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{B}_{k+1}\right)\times \\
&\times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x,u,\xi_k)\right)\,\big|\,f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{B}_{k+1}\right]\Big\}=0\Bigg\}= \\
=\overline{\mathcal{F}}_k\cap\Big\{x\in\mathbb{R}^n \,\big|\, &\forall u\in U_k:\ \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)=0, \\
&\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{B}_{k+1}\right)=0\Big\}= \\
=\overline{\mathcal{F}}_k\cap\{x\in\mathbb{R}^n \,\big|\, &\forall u\in U_k:\ \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{O}_{k+1}\right)=1\Big\}.
\end{aligned}
$$

Утверждение 2 доказано.

3. Утверждение 3 следует из утверждения 1 теоремы 2.

4. Утверждение 4 выполнено, поскольку при $x\in\mathcal{O}_k$ справедливо равенство $\mathsf{B}_k(x)=0$.

5. Утверждение 5 следует из утверждения 1 теоремы 2.

6. При $x \in \mathcal{B}_k$ функция правой части уравнения метода динамического программирования представима в виде

$$
\begin{gathered}
\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right] = \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) \times \\
\times \left(1 - \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right) \,\middle|\, f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\right]\right) + \\
+ \left(1 - \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right)\right) \times \\
\times \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right) \,\middle|\, f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}\right],
\end{gathered}
$$

откуда с использованием двустороннего неравенства для выпуклой комбинации получаем

$$
\begin{gathered}
\min\left\{\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right),\ \left(1 - \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right)\right)\right\} \leqslant \\
\leqslant \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right] \leqslant \\
\leqslant \max\left\{\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right),\ \left(1 - \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}\right)\right)\right\}.
\end{gathered}
$$

С использованием соотношений $1 - \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \in \mathcal{I}_{k+1}) + \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1})$ и $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{I}_k$ завершаем доказательство утверждения 6 теоремы 2.

7. Утверждение 7 следует из предыдущего путем взятия супремума во всех частях неравенства (8).

Доказательство теоремы 3. 1. Введем систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$
\left\{\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right\},\quad \left\{\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right\}.
$$

Тогда с учетом формулы полной вероятности справедлива цепочка равенств

$$
\begin{gathered}
P\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\}\right) = \\
= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \,\middle|\, \bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered} \tag{П.8}
$$

Исследуем второй множитель первого слагаемого правой части последнего выражения. Из цепочки равенств

$$
\mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1} \in \mathcal{F}_{N+1} \,\middle|\, \underline{x}_N \in \mathcal{I}_N\right) = \mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1} \in \mathcal{I}_{N+1} \,\middle|\, \underline{x}_N \in \mathcal{I}_N\right) = 1
$$

следует, что

$$
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \,\middle|\, \bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) = 1.
$$

С учетом последнего равенства выражение (П.8) принимает вид

$$
\begin{gathered}
P\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered} \tag{П.9}
$$

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$
\left\{\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right\}, \quad \left\{\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right\}.
$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для первого слагаемого в правой части (П.9):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) = \\
= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\} \middle| \bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered} \tag{П.10}
$$

Аналогично (П.9) преобразуем правую часть (П.10), откуда получим

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered} \tag{П.11}
$$

Выполним подстановку (П.10) в (П.9):

$$
\begin{gathered}
P\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) + \\
+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered} \tag{П.12}
$$

Проводя аналогичные преобразования в отношении первого слагаемого в (П.12) и вводя системы гипотез

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\}\right\},\quad \left\{\bigcap_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right\},\quad l=\overline{1,\ldots,N-2},$$

получаем выражение для значения вероятностного критерия на стратегии $\underline{u}\,(\cdot)$:

$$\begin{gathered}P\left(\underline{u}\,(\cdot)\right)=\mathbf{P}\left(\underline{x}_1\in\mathcal{I}_1\right)+\\ +\sum_{l=1}^{N-1}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{l+1}\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\}\,\middle|\,\bigcap_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right)+\\ +\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\{\underline{x}_{k+1}\in\mathcal{F}_{k+1}\}\,\middle|\,\bigcap_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right).\end{gathered}\tag{П.13}$$

Заметим теперь, что для первого слагаемого (П.13) справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_1\in\mathcal{I}_1\right)=\mathbf{P}\left(f_0\left(X,\underline{u}_0,\xi_0\right)\in\mathcal{I}_1\right)=\underline{\mathsf{B}}_0\left(X\right)=\underline{F}\left(\varphi,N,X\right),$$

откуда следует выражение (14).

Пункт 1 теоремы 3 доказан.

2. Для доказательства п. 2 теоремы 3 достаточно заметить, что при $x_k\in\mathcal{I}_k$ выполнено $u_k^*=\underline{u}_k$ для всех $k=\overline{0,N}$, откуда аналогичным способом можно получить выражение (14) для функции оптимального значения вероятностного критерия на траекториях системы $\{x_k^*\}_{k=1}^{N+1}$, замкнутой оптимальным управлением $u^*\left(\cdot\right)$.

Пункт 2 теоремы 3 доказан.

3. Пункт 3 теоремы 3 непосредственно следует из п. 7 теоремы 2 и п. 1 теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

Доказательство леммы. Рассмотрим соотношения динамического программирования (3)–(5) и (18)–(20) для задач (2) и (17) соответственно. Поскольку в (19) $\forall x\in\mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)=\max_{u\in U_k}\mathbf{M}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}\left(x\right)+\left(1-\mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}\left(x\right)\right)\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right],\quad k=\overline{0,N},$$

где $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ – поверхность уровня 1 функции Беллмана $\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)$, то описанные условия эквивалентности верны в том случае, если поверхности уровня 1 функций Беллмана в задачах (2) и (17) равны $\mathcal{I}_k=\mathcal{I}_k^{\varphi}$. С учетом рекуррентного соотношения для $\mathcal{I}_k$ (см. п. 1 теоремы 2) отмеченное равенство справедливо только в том случае, если

$$\mathcal{F}_k\subseteq\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ \exists u\in U_k:\ \mathbf{P}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)=1\right\},\quad k=\overline{0,N}.\tag{П.14}$$

Лемма доказана.

Доказательство утверждения 1. В соответствии с п. 1 теоремы 2 запишем уравнение для поверхностей уровней 1 и 0 функции Беллмана на шаге $k = N$:

$$\mathcal{I}_N = \mathcal{F} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists u \in U : \mathbf{P}\left(x\left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \xi_N^i\right) \geqslant -\varphi \right) = 1 \right\},$$
$$\mathcal{O}_N = \overline{\mathcal{F}} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall u \in U : \mathbf{P}\left(x\left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \xi_N^i\right) < -\varphi \right) = 1 \right\}.$$

Используя результат из [13], где были найдены решения соответствующих уравнений, и введенные в разделе 6 обозначения для границ множеств $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{O}_k$, получаем:

$$\mathcal{I}_N = [\varphi, +\infty) \cup \left[\varphi \left(1 + \max\left\{ b, \quad \max_{j=\overline{2,m}} \underline{b}^j \right\} \right)^{-1}, +\infty \right) = \left[\varphi_N^{\mathcal{I}}, +\infty\right),$$
$$\mathcal{O}_N = (-\infty, \varphi] \cap \left(-\infty, \varphi \left(1 + \max\left\{ b, \quad \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j \right\} \right)^{-1} \right] = \left(-\infty, \varphi_N^{\mathcal{O}}\right].$$

Отсюда следует, что $\mathcal{I}_N = \Delta\mathcal{I}_N$. Используя п. 1 теоремы 2, получаем, что на шаге $k = N - 1$ уравнение для изобелл примет вид

$$\mathcal{I}_{N-1} = \mathcal{F} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists u \in U : \mathbf{P}\left(x\left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \xi_{N-1}^i\right) \geqslant \varphi_N^{\mathcal{I}} \right) = 1 \right\},$$
$$\mathcal{O}_{N-1} = \overline{\mathcal{F}} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall u \in U : \mathbf{P}\left(x\left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \xi_{N-1}^i\right) < \varphi_N^{\mathcal{O}} \right) = 1 \right\}.$$

По аналогии с шагом $k = N$ получаем

$$\mathcal{I}_{N-1} = \Delta\mathcal{I}_{N-1} = \left[\varphi_{N-1}^{\mathcal{I}}, +\infty\right), \quad \mathcal{O}_{N-1} = \left(-\infty, \varphi_{N-1}^{\mathcal{O}}\right].$$

Оперируя математической индукцией, заключаем, что для всех $k = \overline{0, N}$ выполнено

$$\mathcal{I}_k = \Delta\mathcal{I}_k = \left[\varphi_k^{\mathcal{I}}, +\infty\right), \quad \mathcal{O}_k = \left(-\infty, \varphi_k^{\mathcal{O}}\right].$$

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим стратегию управления (11), которая с учетом утверждения 1 принимает вид (25). Из п. 3 теоремы 3 следует, что

$$P\left(\underline{u}(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\max_{k \in \{0,\dots,N\}} \underline{x}_{k+1} \geqslant -\varphi \right) \geqslant \underline{F}(\varphi, N, X), \tag{П.15}$$

где функция $\underline{F}$ с учетом

$$\varphi_1^{\mathcal{I}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{ b, \max_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j \right\} \right)^{-N}$$

имеет вид

$$
\text{(П.16)} \qquad \underline{F}\left(\varphi,N,X\right) =
$$

$$
= \max_{u \in U} \mathbf{P}\left(X\left(1 + bu^1 + \sum_{j=2}^{m} u^j \xi_0^{j-1}\right) \geqslant -\frac{\varphi}{\left(1+\max\left\{b, \max\limits_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)^N} \right).
$$

Нетрудно видеть, что величину $\underline{N} \in \mathbb{N}$ можно определить как корень уравнения $\underline{F}\left(\varphi,N,X\right)=1$, но поскольку таких корней бесконечное множество, то будем искать оценку $\underline{N}$ в виде

$$
\text{(П.17)} \qquad \underline{N} = \min\left\{N \in \mathbb{N}:\ \underline{F}\left(\varphi,N,X\right)=1\right\}.
$$

Из (П.15) и (П.17) следует, что

$$
\mathbf{P}\left(\max_{k\in\{0,\dots,\underline{N}\}} \underline{x}_{k+1} \geqslant -\varphi\right) = 1.
$$

Из определений поверхности уровня 1 функции Беллмана и функции $\underline{F}$ следует, что уравнение $\underline{F}\left(\varphi,N,X\right)=1$ эквивалентно включению $X \in \mathcal{I}_0$, что в свою очередь эквивалентно неравенству

$$
X \geqslant -\frac{\varphi}{\left(1+\max\left\{b, \max\limits_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)^{N+1}}.
$$

Путем логарифмирования получаем

$$
N \geqslant \frac{\ln\left(-\varphi\right)-\ln\left(X\right)}{\ln\left(1+\max\left\{b, \max\limits_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)} - 1.
$$

Используя (П.17) окончательно получаем (26).

Утверждение 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
2. *Смирнов И.П.* Об одной задаче быстродействия для стохастической управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 2. С. 247–254.
3. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.
4. *Zhou J.* Infinite Horizon Optimal Control Problem for Stochastic Evolution Equations in Hilbert Spaces // J. Dyn. Control Syst. 2016. V. 22. No. 3. P. 531–554.
5. *Agram N., Haadem S., Øksendal B., Proske F.* A Maximum Principle for Infinite Horizon Delay Equations // SIAM J. Math. Anal. 2013. V. 45. No. 4. P. 2499–2522.

6. *Agram N., Øksendal B.* Infinite Horizon Optimal Control of Forward-Backward Stochastic Differential Equations with Delay // J. Comput. Appl. Math. 2014. V. 259. Part B. P. 336–349.
7. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
8. *Смирнов И.П.* Об управлении вероятностью входа системы в заданную область // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1753–1758.
9. *Азанов В.М.* Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // АиТ. 2014. № 10. С. 39–51.

   Azanov V.M. Optimal Control for Linear Discrete Systems with Respect to Probabilistic Criteria // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 10. P. 1743–1753.
10. *Семаков С.Л.* Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. М.: Наука, 2005.
11. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // АиТ. 2015. № 9. С. 125–149.

    Khametov V.M., Shelemekh E.A. Superhedging of American Options on an Incomplete Market with Discrete Time and Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1616–1634.
12. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
13. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // АиТ. 2018. № 2. С. 3–18.

    Azanov V.M., Kan Yu.S. Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.
14. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Усиленная оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления с вероятностным критерием качества // АиТ. 2019. № 4. С. 53–69.

    Azanov V.M., Kan Yu.S. Refined Estimation of the Bellman Function for Stochastic Optimal Control Problems with Probabilistic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 634–647.
15. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // АиТ. 2004. № 2. С. 179–197.

    Grigor'ev P.V., Kan Yu.S. Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
16. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // АиТ. 2013. № 5. С. 114–136.

    Bunto T.V., Kan Yu.S. Quantile Criterion-based Control of the Securities Portfolio with a Nonzero Ruin Probability // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 5. P. 811–828.
17. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию. // АиТ. 2015. № 7. С. 78–100.

    Kibzun A.I., Ignatov A.N. The Two-Step Problem of Investment Portfolio Selection from Two Risk Assets via the Probability Criterion // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 7. P. 1201–1220.

18. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления стохастическими дискретными системами по критерию вероятности // АиТ. 2017. № 6. С. 57–83.

Azanov V.M., Kan Yu.S. Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.

19. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной моделью к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // АиТ. 2016. № 12. С. 89–111.

Kibzun A.I., Ignatov A.N. Reduction of the Two-Step Problem of Stochastic Optimal Control with Bilinear Model to the Problem of Mixed Integer Linear Programming // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2175–2192.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020