Автоматика и телемеханика, № 12, 2020

© 2020 г. **А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru),**
С.В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ПОГЛОЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ[1]

Рассматривается задача о построении доверительного множества поглощения, представляющего собой множество начальных позиций системы, обеспечивающих с заданной вероятностью непревышение функцией потерь в терминальный момент времени некоторого фиксированного уровня. Предполагается, что зависимость состояния системы в терминальный момент времени от начальной позиции описывается известной случайной функцией. Предлагается подход к построению внешних и внутренних аппроксимаций доверительного множества поглощения. На первом этапе строятся детерминированные внутренняя и внешняя аппроксимации. Затем полученные аппроксимации уточняются для некоторого конечного множества начальных позиций системы с помощью выборочных оценок. Получены оценки объема выборки, достаточного для построения указанных аппроксимаций. Данная оценка улучшается для случая звездчатой функции потерь. Предлагается алгоритм построения аппроксимаций доверительного множества поглощения в двумерном случае. Полученные аппроксимации применяются в задаче планирования производства.

Ключевые слова: стохастическое программирование, доверительное множество поглощения, функция вероятности, функция квантили.

DOI: 10.31857/S0005231020120053

1. Введение

Качество функционирования стохастической системы при заданном начальном состоянии системы может оцениваться вероятностью непревышения потерями фиксированного предельно допустимого уровня в терминальный момент времени. Представляет интерес множество начальных состояний системы, при которых с заданной вероятностью потери, возникающие в ходе функционирования системы, в терминальный момент времени не будут превышать заданный предельно допустимый уровень. Данное множество называется доверительным множеством поглощения.

Описанная задача аналогична задаче построения множеств уровня функции вероятности в задачах стохастического программирования. Свойства

[1] Работа Кибзуна А.И. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00617 А). Работа Иванова С.В. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00436 А).

функции вероятности изучаются в [1, 2]. С точки зрения построения множеств уровня наиболее важными свойствами функции вероятности является выпуклость и квазивыпуклость, при наличии которых множества уровня являются выпуклыми. Достаточные условия выпуклости, квазивыпуклости и логарифмической выпуклости функции вероятности изучаются в [3–8].

Для аппроксимации множеств уровня функции вероятности может быть использован подход, основанный на использовании p-эффективных точек, представляющих собой многомерное обобщение квантили распределения. Алгоритм для поиска p-эффективных точек дискретного случайного вектора предложен в [9]. Аппроксимации множеств уровня с помощью p-эффективных точек, предназначенные для решения задач стохастического программирования, предлагаются в [10, 11]. Обзор подобных методов решения задач стохастического программирования приведен в [12].

Другим подходом к аппроксимации доверительного множества поглощения является использование выборочных методов, когда функция вероятности оценивается с помощью выборки. Данный подход известен и как метод Монте-Карло. Основой для построения таких оценок является равномерный закон больших чисел [13, 14], позволяющий оценить объем выборки, достаточный для оценивания максимального отклонения частоты от вероятности по некоторому классу событий. В дальнейшем данные идеи применялись в [15–17] для оценивания объема выборки, достаточного для аппроксимации задач оптимизации функции математического ожидания. В [18] проведено исследование скорости сходимости для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями.

Данная статья является дальнейшим развитием [19], где был предложен основанный на доверительном методе [1] подход к построению внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения. В статье предлагается подход, сочетающий детерминированные и выборочные методы. На первом этапе строятся детерминированные аппроксимации. Внутренняя аппроксимация строится с помощью методов, предложенных в [19], а внешняя аппроксимация — с помощью α-ядра вероятностной меры [1, 20]. На втором этапе полученные аппроксимации улучшаются с помощью выборочных оценок. Выводятся оценки достаточного для аппроксимации объема выборки. Приводится описание класса задач, для которых объем выборки может быть уменьшен. Рассматривается численный пример.

2. Постановка задачи

Пусть зависимость терминального состояния системы от начального состояния $y \in Y \subset \mathbb{R}^s$ и от реализации $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ случайного вектора X описывается функцией $z\colon Y \times \mathcal{X} \to Z$. Считается, что данная зависимость известна. Поиск функции z не является предметом статьи. Конечно, ее вид существенно зависит от того, какого класса изучаемая система. Будем считать, что множества Y, Z и $\mathcal{X}$ замкнуты. Данное предположение не ограничивает общности, поскольку можно от исходных множеств перейти к их замыканиями. Случайный вектор X определен на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{X}), \mathbf{P}_0)$, где $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ — лебегово пополнение борелевской σ-алгебры подмножеств $\mathcal{X}$. Будем считать, что для всех $x \in \mathcal{X}$ выполнено равенство $X(x) = x$, т.е. пространство элементарных событий отождествляется с пространством реализаций случайного вектора X. Предполагается, что функция $x \mapsto z(y, x)$ является измеримой при всех $y \in Y$.

Пусть борелевская функция $\tilde{\Phi}\colon Z \to \mathbb{R}$ описывает потери, возникающие при известном терминальном состоянии системы. Определим функцию потерь $\Phi\colon Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ в терминальный момент времени:

$$\Phi(y, x) \triangleq \tilde{\Phi}(z(y, x)).$$

Введем функцию вероятности

$$P_\varphi(y) \triangleq \mathbf{P}_0\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — заданный максимально допустимый уровень потерь.

Рассматривается задача построения доверительного множества поглощения, определяемого по правилу

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y \in Y \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — заданное значение вероятности непревышения максимально допустимого уровня потерь. Из приведенного определения следует, что доверительное множество поглощения можно рассматривать как множество уровня функции вероятности.

3. Построение внешней и внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения

Определим функцию квантили

$$\varphi_\alpha(y) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\}.$$

Приведем утверждение, известное как лемма Розенблатта.

Л е м м а 1 [1]. *Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, функция $x \mapsto \Phi(y, x)$ измерима для всех $y \in Y$. Тогда*

$$\{y \in Y \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\} = \{y \in Y \mid \varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi\}.$$

Согласно приведенной лемме Розенблатта доверительное множество поглощения можно определить с помощью функции квантили:

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} = \{y \in Y \mid \varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi\}. \tag{1}$$

Для построения внешней аппроксимации доверительного множества поглощения будем использовать понятие α-ядра вероятностной меры.

О п р е д е л е н и е 1 [1]. *Множество*

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c\|=1} \left\{x \mid c^\top x \leqslant b_\alpha(c)\right\},$$

где $b_\alpha(c)$ — α-квантиль случайной величины $c^\top X$, называется α-ядром вероятностной меры, порожденной распределением случайного вектора X.

Иными словами, α-ядро является пересечением замкнутых полупространств вероятностной меры не менее α.

Введем обозначения:

$$\psi(S,y) \triangleq \sup_{x\in S} \Phi(y,x),$$
$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \triangleq \{y \in Y \mid \psi(S,y) \leqslant \varphi\},$$

где $S \subset \mathcal{X}$ — некоторое множество реализаций случайного вектора X.

Сформулируем утверждение о внешней аппроксимации доверительного множество поглощения.

Лемма 2. Пусть функция $x \mapsto \Phi(y,x)$ квазивыпукла и полунепрерывна снизу при всех значениях $y \in Y$. Тогда для любого множества $\varnothing \neq \underline{K}_\alpha \subset K_\alpha$

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \subset \mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha) \subset \mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$. Тогда из (1) следует, что

$$\varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi. \tag{3}$$

Как доказано в [1, лемма 3.15], для всех $y \in Y$ справедлива оценка

$$\psi(K_\alpha, y) \leqslant \varphi_\alpha(y), \tag{4}$$

если выполнены условия сформулированной леммы 2. Из полученных неравенств (3) и (4) следует, что

$$\psi(K_\alpha, y) \leqslant \varphi,$$

а значит, $y \in Y_\varphi(K_\alpha)$. Таким образом, выполнено включение $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \subset \mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha)$.

Проверим включение $\mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha) \subset \mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha)$. Пусть $y \in \mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha)$. Это значит, что $\psi(K_\alpha, y) \leqslant \varphi$. По построению $\psi(\underline{K}_\alpha, y) \leqslant \psi(K_\alpha, y)$. Поэтому $\psi(\underline{K}_\alpha, y) \leqslant \varphi$. Таким образом, $y \in \mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha)$. Лемма 2 доказана.

В [21] доказано, что $K_\alpha \neq \varnothing$ при $\alpha \in \left(\frac{m}{m+1}, 1\right)$. Лемма 2 предлагает способ построения внешней аппроксимации в том случае, когда возможно построить хотя бы внутреннюю аппроксимацию α-ядра вероятностной меры. Для построения внутренней аппроксимации α-ядра достаточно найти в нем хотя бы одну точку. Если удается найти несколько точек, принадлежащих α-ядру, то в силу его выпуклости выпуклая комбинация данных точек также является его внутренней аппроксимацией. Если α-ядро данной вероятностной меры пусто, то в качестве внешней аппроксимации доверительного множества поглощения можно взять тривиальную аппроксимацию в виде множества Y.

Перейдем к построению внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения. Пусть S — некоторое доверительное множество с вероятностной мерой не менее α, т.е. $S \in \mathcal{F}_\alpha$, где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство всех доверительных множеств с мерой не менее α. В [1, теорема 3.9] доказано, что для всех $y \in Y$ и $S \in \mathcal{F}_\alpha$ выполнено неравенство

$$\psi(S,y) \geqslant \varphi_\alpha(y).$$

Поэтому при выполнении неравенства

$$\psi(S,y) \leqslant \varphi$$

справедливо, что

$$\varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}.$$

Дальнейшие способы улучшения внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения приводятся в [19]. Предлагается использовать параметризованное семейство множеств S_t, $t \in T$, таких что $\mathbf{P}_0(S_t) \geqslant \alpha$, например семейство прямоугольников, повернутых относительно начала координат. В этом случае внутренняя аппроксимация доверительного множества поглощения принимает вид

$$\bigcup_{t\in T} \mathcal{Y}_\varphi(S_t) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}.$$

4. Улучшение аппроксимации доверительного множества поглощения с помощью выборочных методов

Пусть построены (например, с помощью методов, описанных в разделе 3) внутренняя и внешняя аппроксимации доверительного множества поглощения:

$$\underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \subset \overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}.$$

Чтобы выяснить, какие из точек множества $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$ содержатся в доверительном множестве поглощения, построим выборочную оценку функции вероятности.

Пусть задана последовательность независимых случайных векторов $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, распределения которых совпадают с распределением случайного вектора X. Будем считать, что последовательность случайных векторов $\{X_n\}$ задана на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}^\infty, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Построим оценку функции вероятности как частоту события $\{\Phi(y,X) \leqslant \varphi\}$:

$$P_\varphi^{(n)}(y) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,\varphi]}(\Phi(y,X_k)),$$

где

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A, \\ 0, & \text{если } a \notin A. \end{cases}$$

Выборочная аппроксимация доверительного множества поглощения имеет вид

$$\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha} \triangleq \left\{ y \in \overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \mid P^{(n)}_{\varphi}(y) \geqslant \alpha \right\} \cup \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}.$$

Множество $\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha}$ является случайным. Этот объект следует рассматривать как функцию, которая каждой реализации выборки ставит в соответствие некоторое числовое множество.

В общем случае множество $\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha}$ не является ни внутренней, ни внешней аппроксимацией множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$. Однако, как будет показано далее, с высокой вероятностью множество $\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, целиком содержится в множестве $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$, а множество $\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}$ является его внешней аппроксимацией. Пусть $\tilde{Y}$ — конечное подмножество $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$, состоящее из $|\tilde{Y}|$ точек. Количество элементов в данном множестве связано с требуемой точностью построения доверительного множества поглощения и должно обеспечивать достаточную мелкость разбиения множества Y. Выясним, при каком объеме выборки n можно с вероятностью $\beta \in (0,1)$ гарантировать включения $\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ и $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}$. Данные включения гарантируют, что все точки из множества $\tilde{Y}$, в которых значение выборочной оценки вероятности не менее $\alpha+\varepsilon$, содержатся в доверительном множестве поглощения, а во всех точках $\tilde{Y}$ из доверительного множества поглощения значение выборочной оценки вероятности не менее $\alpha-\varepsilon$. Второе условие эквивалентно тому, что все точки из множества $\tilde{Y}$, в которых значение выборочной оценки вероятности менее $\alpha-\varepsilon$, содержатся в дополнении доверительного множества поглощения.

Теорема 1. *Пусть $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{Y}$ — конечное подмножество $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$. Тогда при*

$$n \geqslant \frac{\ln|\tilde{Y}| - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2} \tag{5}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} \right) \geqslant \beta. \tag{6}$$

Доказательство. События, состоящие в том, что $\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ и $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}$, можно представить в виде

$$\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ P^{(n)}_{\varphi}(y) \geqslant \alpha+\varepsilon \right\},$$

$$\left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ P^{(n)}_{\varphi}(y) < \alpha-\varepsilon \right\},$$

который гарантирует измеримость события, рассматриваемого в неравенстве (6).

Случайная величина $nP_\varphi^{(n)}(y)$ определяет число успехов в серии из n опытов с вероятностью успеха $P_\varphi(y)$, а значит, распределена по биномиальному закону. Известно из [22], что для биномиально распределенной случайной величины выполнены неравенства

$$\mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(y) - P_\varphi(y) \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}, \tag{7}$$

$$\mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(y) - P_\varphi(y) \leqslant -\varepsilon\right\} \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}. \tag{8}$$

Из неравенства (7) следует, что

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{y\in\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{P_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha+\varepsilon\right\}\right) \leqslant \\ \leqslant |\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y\in\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha+\varepsilon\right\} \leqslant \\ \leqslant |\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y\in\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(y) \geqslant P_\varphi(y)+\varepsilon\right\} \leqslant |\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2}.\end{gathered} \tag{9}$$

Из неравенства (8) следует, что

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)}\right\} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{y\in\tilde{Y}\cap\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{P_\varphi^{(n)}(y) < \alpha-\varepsilon\right\}\right) \leqslant \\ \leqslant |\tilde{Y}\cap\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y\in\tilde{Y}\cap\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(y) \leqslant \alpha-\varepsilon\right\} \leqslant \\ \leqslant |\tilde{Y}\cap\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y\in\tilde{Y}\cap\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(y) \leqslant P_\varphi(y)-\varepsilon\right\} \leqslant |\tilde{Y}\cap\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2}.\end{gathered} \tag{10}$$

Складывая неравенства (9) и (10), получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\left(\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cup \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)}\right\}\right) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} + \mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)}\right\} \leqslant \\ \leqslant |\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2} + |\tilde{Y}\cap\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2} = |\tilde{Y}| e^{-2n\varepsilon^2}.\end{gathered}$$

Чтобы обеспечить выполнение неравенства (6), эквивалентного неравенству

$$1 - \mathbf{P}\left(\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cup \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)}\right\}\right) \geqslant \beta,$$

достаточно выполнения условия

$$1 - |\tilde{Y}|e^{-2n\varepsilon^2} \geqslant \beta. \tag{11}$$

Выражая из полученного неравенства (11) n, получаем неравенство (5). Теорема 1 доказана.

В общем случае сделать заключение о том, принадлежат ли точки, не входящие в конечное множество $\tilde{Y}$, доверительному множеству поглощения, не представляется возможным. Однако в том случае, когда функция вероятности является квазивогнутой, можно построить выпуклую внутреннюю аппроксимацию доверительного множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

Следствие. Пусть множество Y выпукло, а функция вероятности $y \mapsto P_\varphi(y)$ квазивогнута. Тогда в условиях теоремы 1 при выполнении неравенства (5) *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y}\right) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right) \geqslant \beta. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку функция $y \mapsto P_\varphi(y)$ является квазивогнутой, все ее верхние множества уровня вида

$$\{y \in Y \mid P_\varphi(y) \geqslant \delta\},$$

где $\delta \in [0, 1]$, к которым относится и множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$, выпуклы. Поэтому выпуклая оболочка любых элементов множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ также содержится в нем, а значит,

$$\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \subset \left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y}\right) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\}. \tag{13}$$

Из того что выпуклая оболочка элементов множества содержит эти элементы и из (13) следует равенство

$$\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} = \left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y}\right) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\},$$

обеспечивающее измеримость события, вероятность которого рассматривается в (12). Из теоремы 1 следует, что при выполнении неравенства (5)

$$\mathbf{P}\left(\left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y}\right) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right) \geqslant \beta.$$

Следствие доказано.

5. Уменьшение объема выборки с помощью учета ядра вероятностной меры

Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда в качестве внешней аппроксимации доверительного множества поглощения можно взять множество

$$\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} = \mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha),$$

где $\underline{K}_\alpha \subset K_\alpha$. В силу определения множества $\mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha)$ для всех $x \in \underline{K}_\alpha$ выполнено неравенство $\Phi(y,x) \leqslant \varphi$, а значит,

$$\underline{K}_\alpha \subset \{\Phi(y,X) \leqslant \varphi\}.$$

Поэтому

$$P_\varphi(y) = \gamma + (1-\gamma)\mathbf{P}_0\left\{\Phi(y,X) \leqslant \varphi \mid X \notin \underline{K}_\alpha\right\},$$

где $\gamma = \mathbf{P}_0(\underline{K}_\alpha)$. Таким образом, для оценивания функции вероятности $P_\varphi(y)$ можно использовать выборку, закон распределения которой совпадает с условным законом распределения случайного вектора X относительно события $\{X \notin \underline{K}_\alpha\}$. Последовательность независимых случайных векторов, распределенных по указанному закону, обозначим через $\{\tilde{X}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Используя данную выборку, можно построить оценку функции вероятности

$$\hat{P}_\varphi^{(n)}(y) \triangleq \gamma + \frac{1-\gamma}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi(y,\tilde{X}_k)\right)$$

и оценку доверительного множества поглощения

$$\hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}^{(n)} \triangleq \left\{y \in \overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \mid \hat{P}_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha\right\} \cup \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}.$$

Сформулируем теорему 2, аналогичную теореме 1, для уточненной оценки доверительного множества поглощения.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия леммы 2, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{Y}$ — конечное подмножество $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$. Тогда при*

$$n \geqslant \frac{\ln|\tilde{Y}| - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}(1-\gamma)^2 \tag{14}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{\hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)}\right\}\right) \geqslant \beta. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) \triangleq \mathbf{P}_0\left\{\Phi(y,X) \leqslant \varphi \mid X \notin \underline{K}_\alpha\right\},$$

$$\tilde{P}_\varphi^{(n)}(y) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi(y,\tilde{X}_k)\right).$$

Справедливы включения

$$\left\{\hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{\hat{P}_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha + \varepsilon\right\} =$$

$$= \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \gamma + (1-\gamma)\tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant \alpha + \varepsilon \right\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \gamma + (1-\gamma)\tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant \gamma + (1-\gamma) P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) + \varepsilon \right\} =$$

$$= \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) + \frac{\varepsilon}{1-\gamma} \right\}.$$

Аналогично получаем, что

$$\left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)} \right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ P_{\varphi}^{(n)}(y) < \alpha - \varepsilon \right\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \leqslant P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) - \frac{\varepsilon}{1-\gamma} \right\}.$$

Учитывая, что случайная величина $n\hat{P}_{\varphi}^{(n)}(y)$ распределена по биномиальному закону, для которой выполнены неравенства, аналогичные (7) и (8), из полученных включений следует, что

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cup \left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \right\} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} + \mathbf{P}\left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant |\tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}} + |\tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}} = |\tilde{Y}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}}.$$

Решая неравенство

$$1 - |\tilde{Y}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}} \geqslant \beta,$$

гарантирующее выполнение утверждения теоремы 2, получаем значения n, удовлетворяющие неравенству (14).

Теорема 2 доказана.

6. Уменьшение объема выборки для звездчатой функции потерь

Дальнейшее улучшение оценки объема выборки проведем для случая, когда функция потерь $(y, x) \mapsto \Phi(y, x)$ является звездчатой по y при всех x. Таковыми, например, являются системы с линейной по y функцией потерь $c^\top(x)y$, если $y \geqslant 0$, $c(x) \geqslant 0$.

Определение 2. Функция f с действительными значениями, определенная на выпуклом множестве Y, таком что $0 \in Y$, называется звездчатой, если функция

$$\mu \mapsto f(\mu y)$$

является неубывающей по $\mu \in [0,1]$ для всех y, являющихся внутренними точками множества Y.

Будем считать, что $Y \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество. Пусть

$$D = \max_{y \in Y} \|y\|.$$

Построим конечное множество $\tilde{Y}$ следующим образом:

$$\tilde{Y} = \left\{ y_{ij} \triangleq (r_i \cos\theta_j, r_i \sin\theta_j) \mid r_i = \frac{iD}{M},\ \theta_j = \frac{2(j-1)\pi}{N}, \right. \\ \left. i = \overline{1,M},\ j = \overline{1,N} \right\} \cap Y, \tag{16}$$

где N, M — выбранные натуральные константы.

Из леммы 2 следует, что вероятность

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} \right) \geqslant \beta$$

при

$$n \geqslant \frac{\ln(MN) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}.$$

Однако данную оценку можно существенно улучшить.

Теорема 3. Пусть $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{Y}$ – множество, определенное в (16). Тогда при

$$n \geqslant \frac{\ln(2N) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2} \tag{17}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} \right) \geqslant \beta. \tag{18}$$

Доказательство. Из того что функция потерь является звездчатой, следует, что

$$P_\varphi(y_{ij}) \geqslant P_\varphi(y_{i+1,j}), \tag{19}$$

$$P^{(n)}_\varphi(y_{ij}) \geqslant P^{(n)}_\varphi(y_{i+1,j}) \tag{20}$$

для всех $i = \overline{1, M-1}$ и при всех реализациях выборки. Пусть

$$i_1(j) \triangleq \max\{i \mid P_\varphi(y_{ij}) < \varphi - \varepsilon\},$$
$$i_2(j) \triangleq \min\{i \mid P_\varphi(y_{ij}) \geqslant \varphi + \varepsilon\}.$$

Если указанный минимум или максимум не достигается при некотором j, положим по определению $i_1(j) = 0$ или $i_2(j) = 0$. Пусть

$$\bar{Y} \triangleq \left\{y_{i_1(j),j} \mid j = \overline{1,N}, i_1(j) \neq 0\right\} \cup \left\{y_{i_2(j),j} \mid j = \overline{1,N}, i_2(j) \neq 0\right\}.$$

Заметим, что $|\bar{Y}| \leqslant 2N$.

В силу отмеченных свойств монотонности (19) и (20) справедливо равенство событий

$$\begin{aligned} &\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\} = \\ &= \left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Применяя теорему 1 для конечного множества $\bar{Y}$, получаем, что при

$$n \geqslant \frac{\ln(2N) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right) \geqslant \beta. \tag{22}$$

Из равенства (21) и неравенства (22) следует утверждение теоремы 3.

Если дополнительно к условиям теоремы 3 выполнены условия теоремы 2, то при

$$n \geqslant \frac{\ln(2N) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}(1-\gamma)^2$$

выполнено неравенство (15), а если при этом функция вероятности $y \mapsto P_\varphi(y)$ квазивыпукла, то более того

$$\mathbf{P}\left(\left\{\mathrm{Conv}\left(\hat{\mathcal{Y}}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y}\right) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \hat{\mathcal{Y}}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right) \geqslant \beta.$$

Для решения задачи построения доверительного множества поглощения в рассматриваемом случае может быть использован следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

1. Сгенерировать

$$n = \left\lceil \frac{\ln|\tilde{Y}| - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}(1-\gamma)^2 \right\rceil$$

реализаций случайный величины, распределенной по условному закону распределения случайного вектора X относительно события $X \notin \underline{K}_\alpha$. ($\lceil z \rceil$ обозначает минимальное целое число не менее z.)

2. Присвоить $j := 1$.

3. Пока $j \leqslant N$:

а) найти с помощью метода дихотомии максимальный $\underline{r} \in \mathbb{R}$, такой что $P_\varphi^{(n)}((\underline{r}\cos(\theta_j), \underline{r}\sin(\theta_j))) \geqslant \alpha + \varepsilon$, и минимальный $\bar{r} \in \mathbb{R}$, такой что $P_\varphi^{(n)}((\bar{r}\cos(\theta_j), \bar{r}\sin(\theta_j))) < \alpha - \varepsilon$.

б) включить точки $(r\cos(\theta_j), r\sin(\theta_j))$ для $r \leqslant \underline{r}$ во внутреннюю аппроксимацию доверительного множества поглощения, а для $r \leqslant \bar{r}$ — во внешнюю аппроксимацию.

в) $j := j + 1$.

Замечание 1. Если построение ядра вероятностной меры K_α и даже его непустой внутренней аппроксимации $\underline{K}_\alpha$ является затруднительным, то можно считать, что $\underline{K}_\alpha = \varnothing$, $\gamma = 0$. В этом случае на шаге 1 алгоритма 1 вместо условного закона распределения рассматривается безусловный закон распределения случайного вектора X.

Замечание 2. Аналогичный алгоритм можно предложить и в пространствах большей размерности, но при этом придется отказаться от построения равномерной сетки.

7. Пример

Рассмотрим простейшую модель экономической системы производства и потребления. Предположим, что для производства продукции двух видов может быть закуплено сырье трех типов. Через $v \triangleq (v_1, v_2, v_3)^\top$ обозначим вектор, в котором v_i — объем закупаемого сырья i-го типа, $i \in \{1, 2, 3\}$. Цены на каждый из видов сырья образуют вектор $c \triangleq (c_1, c_2, c_3)^\top$. Технологию производства описывает матрица $B \triangleq (b_{ij})$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, в которой величина b_{ij} показывает количество i-го вида продукции, получаемого из единицы сырья j-го типа. Спрос на продукцию складывается из двух компонент. Первая компонента соответствует спросу, возникающему вследствие заранее подписанных договоров на поставку продукции, и поэтому является детерминированной. Для компоненты спроса введем обозначение

$$y = (y_1, y_2)^\top \in Y = \Big\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant \bar{y}_1,\ 0 \leqslant y_2 \leqslant \bar{y}_2 \Big\}.$$

Вторая компонента $X = (X_1, X_2)^\top$ случайна, ее реализации обозначены через $x = (x_1, x_2)^\top$. Случайность спроса связана с непредсказуемостью поведения потребителей продукции. Необходимо удовлетворить весь возникающий спрос. Тогда потери, связанные с функционированием системы, описываются функцией

$$\Phi(y, x) = \min_{v \in \mathbb{R}^3} \Big\{ c^\top v \mid Bv \geqslant x + y,\ v \geqslant 0 \Big\}.$$

Требуется определить, при каких значениях $y \in Y$ потери при функционировании системы не превысят величину φ с вероятностью α, т.е. построить доверительное множество поглощения.

Переходя к двойственной задаче, получаем, что

$$\Phi(y,x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^2} \left\{ (x+y)^\top \lambda \mid B^\top \lambda \leqslant c,\ \lambda \geqslant 0 \right\}.$$

Через λ^j, $j = \overline{1,J}$, обозначим вершины множества

$$\Lambda \triangleq \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \mid B^\top \lambda \leqslant c,\ \lambda \geqslant 0 \right\}.$$

Тогда функцию потерь можно записать в виде

$$\Phi(y,x) = \max_{j=\overline{1,J}} \left\{ (x+y)^\top \lambda^j \right\}.$$

Заметим, что полученная функция является выпуклой по совокупности аргументов и звездчатой по y.

Решим задачу для следующих модельных данных:

$$c = (8;17;11)^\top, \quad \varphi = 100, \quad \bar{y}_1 = 20, \quad \bar{y}_2 = 20,$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть компоненты случайного вектора X независимы и распределены по нормальному закону $X_1 \sim \mathcal{N}(5,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(6,4)$.

Множество Λ содержит пять вершин:

$$\lambda^1 = (0;0)^\top, \quad \lambda^2 = (0;5{,}5)^\top, \quad \lambda^3 = (1;5)^\top, \quad \lambda^4 = (7;1)^\top, \quad \lambda^5 = (8;0)^\top.$$

Для построения детерминированных аппроксимаций доверительного множества поглощения введем случайный вектор $\bar{X} \triangleq (\bar{X}_1, \bar{X}_2)^\top$, распределенный по стандартному нормальному закону. Реализации этого случайного вектора будем обозначать через $\bar{x} \triangleq (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Случайный вектор $\bar{X}$ свяжем с вектором X соотношениями

$$X_1 = 5 + \bar{X}_1, \quad X_2 = 6 + 2\bar{X}_2.$$

Тогда можно ввести функцию потерь

$$\bar{\Phi}(y,\bar{x}) \triangleq \Phi\left(y, (5+\bar{x}_1, 6+2\bar{x}_2)^\top\right),$$

значения которой совпадают с исходной функцией потерь. Для вероятностной меры, порожденной двумерным стандартным нормальным распределением, известно, что α-ядро является шаром радиуса, равного квантили стандартного нормального распределения уровня α, а доверительный шар имеет радиус, равный квадратному корню из квантили уровня α распределения $\chi^2(2)$.

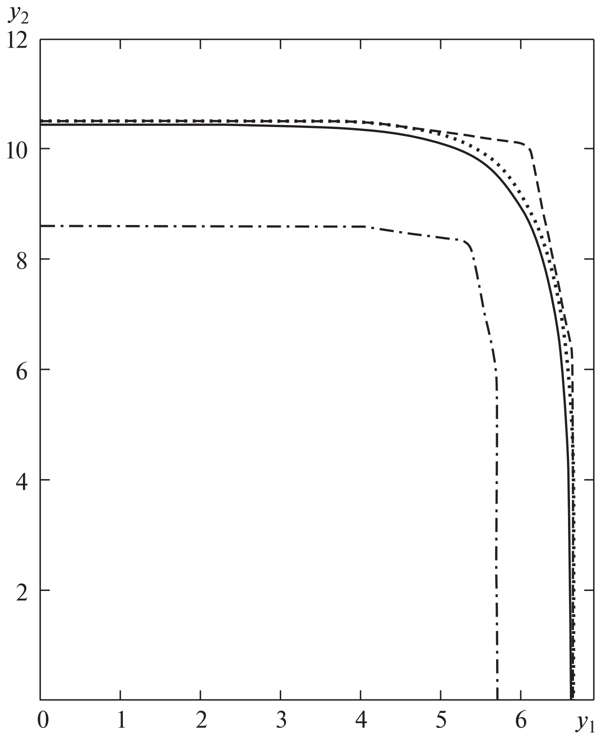

Рис. 1. Аппроксимации доверительного множества поглощения при $\alpha = 0{,}8$.

Вычисления были проведены для уровней $\alpha = 0{,}8$ и $\alpha = 0{,}9$. Их результаты представлены на рис. 1 и 2.

Штриховой линией обозначена граница внешней аппроксимации доверительного множества поглощения, полученной с помощью ядра вероятностной меры. Штрихпунктирной линией обозначена граница внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения, полученной с помощью доверительного шара.

Статистическая аппроксимация строилась для уровня доверительной вероятности $\beta = 0{,}99$ при $\varepsilon = 0{,}01$. Для построения аппроксимаций доверительного множества поглощения использовался алгоритм 1 при $N = 400$, но в силу того что множество Y целиком содержится в первой координатной четверти, рассматривались значения $j = \overline{1, \tilde{N}}$, $\tilde{N} = 101$, что позволило уменьшить объем используемой выборки. Если не учитывать вероятностную меру α-ядра, то для аппроксимации задачи необходим объем выборки $n = 49568$. Если использовать условное распределение, то при $\alpha = 0{,}8$ требуется объем выборки $n = 24411$, а при $\alpha = 0{,}9$ ее объем можно уменьшить до $n = 9593$.

На рис. 1 и 2 сплошной линией изображена внутренняя статистическая аппроксимация доверительного множества поглощения, а отмеченные точки с вероятностью β являются внешними по отношению к доверительному множеству поглощения. Полученные внешняя и внутренняя аппроксимации близки друг к другу, что подтверждает эффективность разработанного ме-

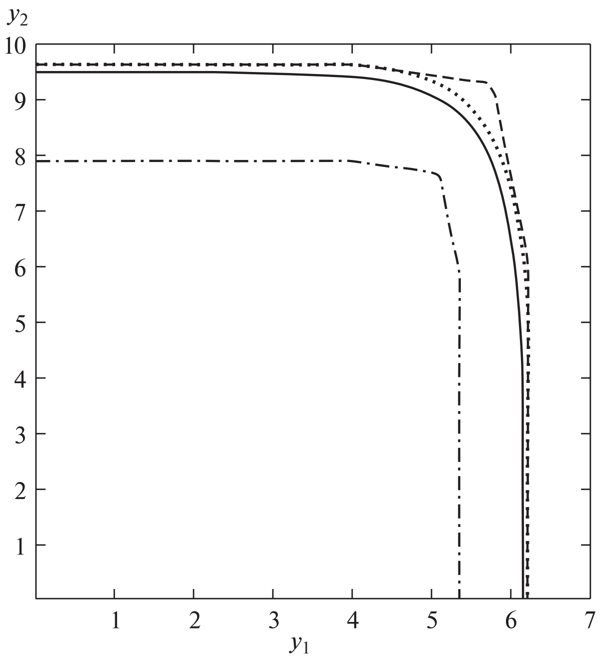

Рис. 2. Аппроксимации доверительного множества поглощения при $\alpha = 0{,}9$.

тода построения статистических аппроксимаций доверительного множества поглощения.

Заметим, что в сравнении с предложенным в статье методом решения задачи непосредственное статистическое оценивание значений функции вероятности в большом количестве точек из множества Y приводит к гораздо большему объему вычислений. Для получения аналогичных по точности результатов в каждой точке конечного подмножества $\tilde{Y}$ множества Y необходимо провести около 2300 вычислений. При $N = 100$, $M = 100$ это приводит к необходимости моделирования $23 \cdot 10^6$ реализаций случайных факторов.

8. Заключение

В статье разработан статистический подход к построению внутренней и внешней статистических аппроксимаций доверительного множества поглощения. Получены теоретические оценки достаточного объема выборки для построения аппроксимаций некоторого конечного множества начальных позиций системы. Отметим, что данный объем выборки одновременно гарантирует с заданной вероятностью то, что два построенных множества являются внутренней и внешней аппроксимациями заданного конечного подмножества истинного доверительного множества поглощения. Предложены условия, при которых можно построить внутреннюю аппроксимацию самого́ доверительного множества поглощения, а не его конечного подмножества. На численном примере показано, что указанные аппроксимации строятся при приемлемом объеме выборки. При этом обеспечивается близость внутренней и внешней аппроксимаций друг к другу. Конечно, для ряда задач достаточный объем выборки может быть уменьшен. Описание классов таких задач может являться предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
2. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Dordrecht–Boston: Kluwer, 1995.
3. *Тамм Э.* О квазивыпуклости функций вероятности и квантили // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. 1976. Т. 25. № 2. С. 141–144.
4. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ. 1996. № 3. С. 82–102.

   Kan Yu.S., Kibzun A.I. Convexity Properties of Probability Functions and Quantiles in Optimization Problems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 3. P. 368–383.
5. *Van Ackooij W.* Eventual Convexity of Chance Constrained Feasible Sets // Optimization (J. Math. Programm. Oper. Res.). 2015. V. 64. No. 5. P. 1263–1284.
6. *Prékopa A.* On Logarithmic Concave Measures and Functions // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. V. 34. P. 335–343.
7. *Borell C.* Convex Set Functions in d-Space // Period. Math. Hung. 1975. V. 6. No. 2. P. 111–136.
8. *Норкин В.И., Роенко Н.В.* α-вогнутые функции и меры и их приложения // Кибернетика и системный анализ. 1991. № 6. С. 77–88.

   Norkin V.I., Roenko N.V. α-Concave Functions and Measures and Their Applications // Cybern. Syst. Anal. 1991. V. 27. No. 6. P. 860–869.
9. *Lejeune M., Noyan N.* Mathematical Programming Approaches for Generating p-Efficient Points // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 207 P. 590–600.
10. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* On Convex Probabilistic Programming with Discrete Distributions // Nonlinear Anal.-Theor. 2001. V. 47. No. 3. P. 1997–2009.
11. *Van Ackooij W., Berge V, de Oliveira W., Sagastizábal C.* Probabilistic Optimization via Approximate p-Efficient Points and Bundle Methods // Comput. Oper. Res. 2017. V. 77. P. 177–193.
12. *Lejeune M.A., Prékopa A.* Relaxations for Probabilistically Constrained Stochastic Programming Problems: Review and Extensions // Ann. Oper. Res. 2018 (online first). https://doi.org/10.1007/s10479-018-2934-8.
13. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). М.: Наука, 1974.
14. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям // Теория вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. № 2. С. 264–279.
15. *Shapiro A.* Monte Carlo Sampling Methods. / Ruszczyński A., Shapiro A. (eds.) Handbooks in OR Handbooks in Operations Research and Management Science & MS. V. 10. P. 353–425. North-Holland, Dordrecht, The Netherlands, 2003.
16. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2014.

17. *Kleywegt A.J., Shapiro A., Homem-De-Mello T.* The Sample Average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization // SIAM J. Optim. 2001. V. 12. No. 2. P. 479–502.

18. *Luedtke J. Ahmed S.* A Sample Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints // SIAM J. Optim. 2008. V. 19. No. 2. P. 674–699.

19. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статических стохастических систем // АиТ. 2020. № 4. С. 21–36.

    Kibzun A.I., Ivanov S.V., Stepanova A.S. Construction of Confidence Absorbing Set for Analysis of Static Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 4. P. 589–601.

20. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // АиТ. 2019. № 11. С. 93–107.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.

21. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров // АиТ. 2017. № 7. С. 95–109.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Linearization Method for Solving Quantile Optimization Problems with Loss Function Depending on a Vector of Small Random Parameters // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1251–1263.

22. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: МЦНМО, 2017.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 18.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020